

Übungsblatt 0 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 1: Seilwellen

a) Für die rückstellende Kraft auf ein Seilelement gilt nach der Zeichnung:

$$F_y = F_0 \sin(\alpha)$$

Für kleine Winkel/Auslenkungen gilt der Zusammenhang:

$$\sin(\alpha) \approx \alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{dy}{dx}$$

Für die in y-Richtung wirkende Kraft gilt demnach:

$$F_y = F_0 \frac{dy}{dx}$$

Für einen Seilabschnitt $ds \approx dx$ ergibt sich somit die gesamte rückstellende Kraft als:

$$dF = F_y(x + dx) - F_y(x) = \frac{dF_y}{dx} \cdot dx = F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

b) Die Kraft auf das Seilstück ist gegeben durch:

$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = dF = F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

Mit dem Massenelement $dm = \rho A ds \approx \rho A dx$ und der Kraft $F_0 = \sigma A$ kann

$$\rho \cdot A \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sigma \cdot A \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

mit der Substitution von $c^2 = \frac{\sigma}{\rho}$ zur Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

umgeformt werden. Dabei ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c durch die Dichte und die Zugspannung durch $c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ bestimmt.

c) Für die Kraft zwei Massenelemente nahe der Verbundstelle mit dm_1 bzw. dm_2 gilt:

$$dm_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F = dm_2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Wodurch sich der Zusammenhang ergibt:

$$\frac{dm_1}{dm_2} \partial_t^2 y_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \partial_t^2 y_1 = \partial_t^2 y_2$$

Nach der Wellengleichung gilt nun an der Stelle $x = a$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 y_2 &= \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2 y_2 = \frac{1}{c_2^2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \partial_t^2 y_1 \\ &= \frac{1}{\frac{\rho_1}{\rho_2} c_1^2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \partial_t^2 y_1 = \partial_x^2 y_1 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Funktionen y_1 bzw. y_2 die Stetigkeit in Punkt a , sowie die Stetigkeit der ersten Ableitung

Übungsblatt 0 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 2: Fourier Reihe

a) Die Funktion

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{ikx} \quad k = \frac{\pi}{l}n$$

ist orthonormiert, denn aus

$$\begin{aligned} \varphi_n(x)^* \cdot \varphi_m(x) &= \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{-i\frac{\pi}{l}mx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i\frac{\pi}{l}mx} \\ &= \frac{1}{2l} e^{i\frac{\pi}{l}(m-n)x} \end{aligned}$$

folgt für $n = m$

$$\int_{-l}^l \varphi_n(x)^* \cdot \varphi_m(x) dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^0 dx = 1$$

und für $m \neq n$ und $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \varphi_n(x)^* \cdot \varphi_m(x) dx &= \frac{1}{2} \frac{-i}{\pi(m-n)} \left[e^{\frac{\pi}{l}(m-n)x} \right]_{-l}^l \\ &= \frac{1}{\pi(m-n)} \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{\pi}{l}(m-n)l} - e^{-\frac{\pi}{l}(m-n)l} \right) \\ &= \frac{1}{\pi(m-n)} \sin(\pi(m-n)) = 0 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_{-l}^l \varphi_n^*(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Für das Fehlerquadrat gilt in Abhängigkeit der Koeffizienten c_1, \dots, c_N

$$\begin{aligned} \delta_N^2(c_{-N}, \dots, c_N) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{2l} \left(\int_{-l}^l f(x)^2 dx - \sum_{n=-N}^N c_n \int_{-l}^l f(x) \varphi_n(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=-N}^N c_n^* \int_{-l}^l f(x) \varphi_n^*(x) dx + \sum_{n,m=-N}^N c_n c_m^* \int_{-l}^l \varphi_n(x) \varphi_m^*(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2l} \left(\int_{-l}^l f(x)^2 dx - \sum_{n=-N}^N c_n \int_{-l}^l f(x) \varphi_n(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=-N}^N c_n^* \int_{-l}^l f(x) \varphi_n^*(x) dx + \sum_{n=-N}^N c_n c_m^* \right) \end{aligned}$$

Durch Ableiten nach den normalen und den komplex-konjugierten Koeffizienten ergibt sich durch Nullsetzen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta_N^2}{\partial c} &= \frac{1}{2l} \left(- \int_{-l}^l \varphi_n(x) f(x) dx + c_n^* \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial \delta_N^2}{\partial c^*} &= \frac{1}{2l} \left(- \int_{-l}^l \varphi_n^*(x) f(x) dx + c_n \right) \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Die Koeffizienten am kritischen Punkt als

$$c_n = \int_{-l}^l \varphi_n^*(x) f(x) dx$$

c) Setzt man nun

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{ikx} \quad c_n = \int_{-l}^l \varphi_n^*(t) f(t) dt = \int_{-l}^l \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{-ikt} f(t) dt$$

mit der Abkürzung $k = \frac{\pi}{l}n$, so ergibt sich für die Funktion $\tilde{f}_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x)$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_N(x) &= \sum_{n=-N}^N \int_{-l}^l \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{-ikt} f(t) dt \cdot f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2l} \sum_{n=-N}^N \int_{-l}^l f(t) [\cos(-kt) + i \sin(-kt)] dt \cdot [\cos(kx) + i \sin(kx)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N \left[\underbrace{\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos(kt) dt}_{:=a_n} - i \underbrace{\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin(kt) dt}_{:=b_n} \right] \cdot [\cos(kx) + i \sin(kx)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N [a_n \cos(kx) + i a_n \sin(kx) - i b_n \cos(kx) + b_n \sin(kx)] \\ &\stackrel{*}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(kx) + b_n \sin(kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ (*) a_n &= a_{-n} \quad \text{und} \quad b_n = -b_{-n}\end{aligned}$$

mit den Parametern

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt$$

für eine symmetrische Funktion ergeben sich $b_n = 0$, während bei anisymmetrischen Funktionen für die Parameter $a_n = 0$ gilt.

d) Für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} A(1 - \frac{x}{l}) & 0 < x \leq l \\ f(-x) & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

ergeben sich die Koeffizienten zu:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l A\left(1 - \frac{t}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt \\ &= \frac{2A}{\pi^2 n^2 l} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \pi n l - \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) l - \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \right]_{x=0}^l \\ &= \frac{2A}{\pi^2 n^2} (1 - \cos(\pi n)) = \frac{2A}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

Für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} A(1 - \frac{x}{l}) & 0 < x \leq l \\ -f(-x) & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

ergeben sich die Koeffizienten zu:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l A\left(1 - \frac{t}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt - \frac{1}{l} \int_{-l}^0 A\left(1 + \frac{x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt \\ &= \frac{1}{l} \left[\frac{lA}{n^2 \pi^2} (n\pi - \sin(n\pi)) \right] - \frac{1}{l} \left[\frac{lA}{\pi^2 n^2} (\sin(n\pi) - n\pi) \right] \\ &= \frac{A}{n\pi} + \frac{A}{n\pi} = \frac{2A}{n\pi} \\ a_n &= 0 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Fourier Reihen der beiden Funktionen gehen für große N gegen Null. Wobei die Koeffizienten der ersten Funktions schneller gegen Null streben.

Aufgabe 2: Nabla-Kalkül

1.

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) \\ &= B(AC) - C(AB) + C(BA) - A(BC) + A(CB) - B(CA) \\ &= B(AC) - B(CA) + C(BA) - C(AB) + A(CB) - A(BC) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (A \times B) &= (B\nabla_A)A - B(\nabla_A A) + A(\nabla_B B) - (A\nabla_B)B \\
&= \nabla_B(AB) - B(A\nabla_B) - \nabla_A(BA) + A(B\nabla_A) \\
&\quad + A(B\nabla_B) - \nabla_B(BA) - B(A\nabla_A) + \nabla_A(AB) \\
&= A \times (\nabla_B \times B) - B \times (\nabla_A \times A) + B \times (A \times \nabla_B) - A \times (B \times \nabla_A) \\
&= A \times (\nabla_B \times B) - B \times (\nabla_A \times A) - (A \times \nabla_B) \times B + (B \times \nabla_A) \times A
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\nabla(\phi A \times B) &= B(\nabla \times \phi A) - \phi A(\nabla \times B) \\
&= B(\phi \nabla \times A - A \times \nabla \phi) - \phi A(\nabla \times B) \\
&= B\phi \nabla \times A - BA \times \nabla \phi - \phi A(\nabla \times B) \\
&= \phi(B\nabla \times A - A\nabla \times B) + A \times B\nabla \phi
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\nabla(AB) &= \nabla_A AB + \nabla_B AB \\
&= (A\nabla_B)B + \nabla_B(AB) - B(A\nabla_B) + (B\nabla_A)A + \nabla_A(BA) - A(B\nabla_A) \\
&= (A\nabla)B + A \times (\nabla \times B) + (B\nabla)A + B \times (\nabla \times A)
\end{aligned}$$

5. Es ist für $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\partial_x^2 f(r) = \frac{f''(r)x^2}{r^2} - \frac{f'(r)x^2}{r^3} + \frac{f'(r)}{r}$$

So ergibt sich für $\nabla^2 f(r)$:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(r) &= \frac{f''(r)(x^2 + y^2 + z^2)}{r^2} - \frac{f'(r)(x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} + 3\frac{f'(r)}{r} \\
&= \frac{2f'(r)}{r} + f''(r) = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r \right) f(r)
\end{aligned}$$

Übungsblatt 2 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 7: Seilwellen Teil 2

- a) Ist $y_1(x, t)$ die Lösung der Wellengleichung für $x < 0$ und analog $y_2(x, t)$ für $x > 0$ ergibt sich für $y(x, t)$:

$$y_1(x, t) = f_I(x - c_1 t) + f_R(x + c_1 t)$$

und für $y_2(x, t)$

$$y_2(x, t) = f_T(x - c_2 t)$$

Wobei sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_1 ergibt als:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1}}$$

- b) Aus der Stetigkeit der $y_1(x = 0, t)$ und $y_2(x = 0, t)$ ergibt sich die erste Gleichung des Systems:

$$f_I(-c_1 t) + f_R(c_1 t) = f_T(-c_2 t)$$

Aus der Stetigkeit der ersten Ableitungen von y_i ergibt sich

$$\frac{d}{dx} f_I(x - c_1 t) + \frac{d}{dx} f_R(x + c_1 t) = \frac{d}{dx} f_T(x - c_2 t)$$

bei $x = 0$. Die Ausführung der Differentiation liefert dann

$$f'_I(-c_1 t) + f'_R(c_1 t) = f'_T(-c_2 t)$$

Eine Integration beider Seiten über t liefert nun

$$-\frac{1}{c_1} f_I(-c_1 t) + \frac{1}{c_1} f_R(c_1 t) = -\frac{1}{c_2} f_T(-c_2 t)$$

Welches die zweite Gleichung des Systems darstellt.

- c) Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite liefert für f_R

$$f_R(c_1 t) = -\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} f_I(-c_1 t)$$

und für f_T

$$f_T(-c_2 t) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} f_I(-c_1 t)$$

Damit ergeben sich die Reflektions und Transmissionskoeffizienten als

$$R = -\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \quad T = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}$$

Damit ist die Auslenkung der reflektierten Wellenfront der Eigentlichen Welle entgegengesetzt und an der y -Achse „gespiegelt“. Es gilt $f_T(t) = T f_I(-t)$. Das transmittierte Wellenpaket wird mit dem Verhältnis von c_1/c_2 skaliert. Die Auslenkung der transmittierten Wellenfront hat die gleiche Richtung wie das Wellenpaket f_I . Jeweils wird die Auslenkung durch einen Vorfaktor gestaucht.

d) Die Energiedichte

$$u = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} y \right)^2 + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} y \right)^2$$

setzt sich aus zwei unterschiedlichen Energiedichtearten zusammen. Der erste Term entspricht der kinetischen Energiedichte. Dies folgt aus der kinetischen Energie eines Volumens dV

$$\frac{dE_{kin}}{dV} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dV} \left(\frac{\partial}{\partial t} y \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} y \right)^2$$

Der zweite Teil der Gleichung entspricht der Energiedichte durch eine potentielle Energie. Betrachtet man die Energie, die nötig ist um das Seil von einer Länge dx auf eine Länge ds (durch Auslenken) gegen die Zugspannung σ zu verlängern, ergibt sich

$$dE_{Pot} = \sigma(ds - dx)$$

Für kleine Auslenkungen gilt nun

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)$$

Somit ergibt sich für die potentielle Energiedichte:

$$dE_{Pot} = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

e) Für die Energiestromdichte gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} s &= -\frac{\partial}{\partial t} u = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \\ &= -\frac{\rho}{2} 2 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{2} 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \\ &= -\rho \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \\ &= -\sigma \left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) \\ &= -\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Energiestromdichte s als

$$s = -\sigma \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

f) Die Energiestromdichte ist als Produkt aus der stetigen Ableitung nach der Zeit und der stetigen Ableitung nach dem Ort bei $x = 0$ stetig. Für den Energiestrom gilt:

$$S = \int s dx = -\sigma \int_{x < 0} \frac{\partial y_1}{\partial t} \frac{\partial y_1}{\partial x} - \sigma \int_{x > 0} \frac{\partial y_2}{\partial t} \frac{\partial y_2}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sigma \int_{x < 0} (f'_I(x - c_1 t) + f'_R(x + c_1 t))(-c_1 f'_I(x - c_1 t) + c_1 f'_R(x + c_1 t)) \\
&\quad - \sigma \int_{x > 0} f_T(x - c_2 t)(-c_2) f_T(x - c_2 t) \\
&= -\sigma c_1 \int_{x < 0} (f'_I(x - c_1 t)^2 - f'_I(x + c_1 t)^2) + \sigma c_2 \int_{x > 0} f_T(x - c_2 t)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 8: Drude-Modell

a) Für den feldfreien Fall ergibt sich aus der Gleichung

$$\dot{\vec{v}} + \gamma \vec{v} = 0$$

mit dem Ansatz $v = Ae^{kt}$ durch einsetzen

$$kAe^{kt} + \gamma Ae^{kt} = 0 \quad \rightarrow k = -\gamma$$

die Lösung von

$$v = Ae^{-\gamma t}$$

Die Konstante γ führt also zu einer Dämpfung der Geschwindigkeit. Sie ist damit eine Art Reibungskoeffizient. Im stationären Fall ergibt sich eine konstante Geschwindigkeit

$$\vec{v} = -\frac{e}{m\gamma} \vec{E}$$

b) Betrachtet man den Ansatz $\vec{v}_p = \vec{v}_h \Delta$ zur Lösung der Gleichung

$$\dot{\vec{v}} + \gamma \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{E} = 0$$

so ergibt sich durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
0 &= (\dot{\vec{v}}_h \Delta + \vec{v}_h \dot{\Delta}) + \gamma \vec{v}_h \Delta + \frac{e}{m} \vec{E} \\
&= -\gamma \vec{v}_h \Delta + \vec{v}_h \dot{\Delta} + \gamma \vec{v}_h \Delta + \frac{e}{m} \vec{E} \\
&= \vec{v}_h \dot{\Delta} + \frac{e}{m} \vec{E}
\end{aligned}$$

woraus sich für Δ ergibt

$$\dot{\Delta} = -\frac{e}{mv_h} E \quad \Rightarrow \quad \Delta = -\int_t \frac{e}{mv_h} E$$

Mit der Lösung $v_h = Ae^{-\gamma t}$ der homogenen Gleichung ergibt sich die partikuläre Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichung

$$\vec{v}_p = \vec{v}_h \Delta = -Ae^{-\gamma t} \frac{e}{Am} \int e^{\gamma t} E dt = -e^{-\gamma t} \frac{e}{m} \int e^{\gamma t} E dt$$

- c) Betrachtet man die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für konstantes E so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{v}_p &= -e^{-\gamma t} \frac{e}{m} \vec{E} \int_0^t e^{\gamma t'} dt' = -\frac{e\vec{E}}{m} e^{-\gamma t} \left[\frac{e^{\gamma t'}}{\gamma} \right]_0^t \\ &= -\frac{e\vec{E}}{m\gamma} e^{-\gamma t} [e^{\gamma t} - 1] = -\frac{e\vec{E}}{m\gamma} [1 - e^{-\gamma t}]\end{aligned}$$

Für großes t nähert sich so die Geschwindigkeit an die Geschwindigkeit des stationären Falls an. Die Driftgeschwindigkeit ergibt sich demnach als:

$$v_D = -\frac{e}{m\gamma} E$$

Mit der Definition der Leitfähigkeit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ergibt sich aus

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2}{m\gamma} \vec{E}$$

die Leitfähigkeit σ als

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\gamma}$$

- d) Im Falle eines periodischen elektrischen Feldes $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ ergibt sich die Lösung \vec{v}_p

$$\begin{aligned}\vec{v}_p &= -\frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-\gamma t} \int_0^t e^{(\gamma-i\omega)t'} dt' \\ &= -\frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-\gamma t} \frac{e^{(\gamma-i\omega)t} - 1}{\gamma - i\omega} \\ &= -\frac{e}{m(\gamma - i\omega)} \vec{E}_0 (e^{-i\omega t} - e^{-\gamma t})\end{aligned}$$

Mit $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -ne\vec{v}_p$ ergibt sich analog zu c) die Leitfähigkeit als:

$$\sigma = \frac{ne^2}{m(\gamma - i\omega)}$$

Übungsblatt 2 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 10: Antireflexbeschichtung

- a) Der Brechungsindex der Reflektionsbeschichtung n_2 kann entweder größer oder kleiner als der Brechungsindex des Glases n_3 sein, ist aber größer als die Brechzahl von Luft n_1 .

Ist $n_2 > n_3$ erfährt eine an der Grenzschicht 2-3 reflektierte Welle keinen Phasensprung. Damit sich die Reflektierten Wellen destruktiv überlagern müsste der Lichtweg also ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge in Medium 2 betragen. Es wäre $d = m\lambda/2 = m\lambda_0/(2n_2)$ mit $m \in \mathbb{N}$.

Im Falle von $n_2 < n_3$ muss für eine destruktive Interferenz die Lichtweglänge durch Medium 2 genau ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge plus einer halben Wellenlänge betrachten, also $d = m\lambda/2 + \lambda/4 = \frac{2m+1}{4} \frac{\lambda_0}{n_2}$

Im Folgenden bezeichne R_1 den Reflektionskoeffizienten der Grenzschicht 1-2 und R_2 den der Grenzschicht 2-3, also

$$R_1 = \left| \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right| \quad R_2 = \left| \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \right|$$

Die Amplitude der einfach reflektierten Welle ergibt sich dann durch:

$$E_1 = R_1 E_0$$

Die Amplitude der zweimal durch die Grenzschicht 1-2 transmittierten und an 2-3 reflektierten Schicht ergibt sich als

$$E_2 = (1 - R_1)R_2(1 - R_1)E_0 = (1 - R_1)^2 R_2 E_0$$

Für die weiteren Amplituden ergibt sich die Amplitude durch Reflektionen an den Grenzschichten. Also

$$E_n = (1 - R_1)^2 R_1^{n-2} R_2^{n-1} E_0 = (1 - R_1)^2 (R_1 R_2)^{n-2} R_2 E_0$$

Die gesamte Amplitude ergibt sich durch die Aufsummierung der einzelnen Amplitude als

$$\begin{aligned} E &= E_0 \left(R_1 - (1 - R_1)^2 R_2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (R_1 R_2)^n \right) \right) \\ &= E_0 \left(R_1 - (1 - R_1)^2 R_2 \frac{1}{1 - R_1 R_2} \right) \\ &= \frac{R_1 - R_2}{1 - R_1 R_2} E_0 \end{aligned}$$

Die reflektierte Amplitude wird also für $R_1 = R_2$ minimal woraus sich für die Brechzahl ergibt

$$\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \Rightarrow n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$$

Für die Dicke d muss also gelten:

$$d = \frac{2m + 1}{4} \frac{\lambda_0}{n_2}$$

Mit den Werten $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$ und $\lambda_0 = 589nm$ ist also

$$n_2 = \sqrt{1.5} \approx 1.22 \quad d_0 = \frac{1}{4} \frac{589nm}{\sqrt{1.5}} \approx 120nm$$

- b) Analog zum ersten Teil bezeichne R_4 bzw. R_5 die Reflektionskoeffizienten der Schichten 4-5 bzw. 5-6. Dann gilt für die Amplitude der n -mal in der Schicht 5 hin und hergelaufenen Welle

$$E_n = (1 - R_4)(1 - R_5)(R_4 R_5)^{n-1} E_0$$

Bei konstruktiver Interferenz ergibt sich die Gesamtamplitude als

$$\begin{aligned} E &= (1 - R_4)(1 - R_5) E_0 \sum_{n=0}^{\infty} (R_4 R_5)^n \\ &= (1 - R_4)(1 - R_5) E_0 \frac{1}{1 - R_4 R_5} \\ &= \frac{2n_5 n_6}{n_4 n_6 + n_5^2} E_0 \end{aligned}$$

Extremal wird die resultierende Amplitude ebenfalls bei

$$n_5 = \sqrt{n_4 n_6}$$

Analog zur ersten Aufgabe muss nun der Lichtweg durch die Schicht ein Vielfaches und ein halbes der Wellenlänge betragen, also

$$d = \frac{2m + 1}{4} \frac{\lambda_0}{n_2}$$

Mit den Werten $n_4 = 1.5$, $n_6 = 3.8$ und $\lambda_0 = 650nm$ ergibt sich

$$n_5 = \sqrt{1.5 \cdot 3.8} \approx 2.39 \quad d = \frac{1}{4} \frac{650nm}{\sqrt{1.5 \cdot 3.8}} \approx 68nm$$

Übungsblatt 2 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 12: Lorentzsches Atommodell

a) Für einen Oszillator mit der Federkonstante d gilt:

$$m_e \ddot{x} = -Dx$$

Erweitert um den die Dämpfung und Anregung ergibt dies

$$m_e \ddot{x} + m_e \gamma \dot{x} + Dx - eE_0 e^{i\omega t} = 0$$

Mit dem Ansatz $x = x_0 e^{i\omega t}$ ergibt sich für x_0 :

$$x_0 [-m_e \omega^2 + D + i\omega m_e \gamma] + eE = 0$$

Die Bewegungsgleichung von P ergibt sich so aus $P_0 = -eNx_0$:

$$\ddot{P} + \underbrace{\left[\frac{D}{m_e} - \frac{e^2 N}{3\epsilon_0 m_e} \right]}_{\omega_0^2} P + \gamma \dot{P} = \epsilon_0 \underbrace{\frac{e^2 N}{\epsilon_0 m_e}}_{\omega_p^2} E$$

Die Maxwell-Gleichungen ergeben sich so zu:

$$\begin{aligned} \nabla B &= 0 & \nabla \times E &= -\dot{B} \\ \nabla \times B &= \mu\mu_0(\epsilon\dot{E} + \dot{P}) & \epsilon_0 \nabla E + \nabla P &= 0 \end{aligned}$$

b) Mit dem Ansatz $A = A_0 e^{-i(kx - \omega t)}$ für die Felder ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \nabla B &= 0 & \Rightarrow & \quad kB_0 = 0 \\ \nabla \times E &= -\dot{B} & \Rightarrow & \quad k \times E_0 = \omega B_0 \\ \epsilon_0 \nabla E + \nabla P &= 0 & \Rightarrow & \quad \epsilon_0 kE + kP = 0 \\ \nabla \times B &= \mu\mu_0(\epsilon\dot{E} + \dot{P}) & \Rightarrow & \quad -k \times B = \mu\mu_0(\epsilon_0 E_0 + P_0) \end{aligned}$$

Aus der Bewegungsgleichung der Polarisation ergibt sich als letztes

$$\omega^2 P_0 + \omega_0^2 P_0 + i\omega\gamma P_0 = \epsilon_0 \omega_p^2 E_0$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} A_0^{\parallel} + A_0^{\perp} &= (A_0 k)k + (k \times A_0) \times k = (A_0 k)k - k \times (k \times A_0) \\ &= (A_0 k)k + (A_0 k)k - (kk)A_0 = (kk)A_0 = A_0 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich

$$\begin{aligned} kB_0 = 0 & \Rightarrow B_0^{\parallel} = 0 \\ B_0 = \frac{1}{\omega}(k \times E_0) & \Rightarrow B_0^{\perp} = \frac{k}{\omega}(k \times E_0^{\perp}) \\ \epsilon_0 kE + kP = 0 & \Rightarrow \epsilon_0 E_0^{\parallel} + P_0^{\parallel} = 0 \end{aligned}$$

Übungsblatt 3 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 14: Sonnenuntergang

- a) Für die Brechung an einer Schicht zwischen den Medien mit den Brechungsindizes $n(h + dh)$ und $n(h)$ gilt nach dem Brechungsgesetz

$$\frac{n(h - dh)}{n(h)} = \frac{\sin(\varphi + d\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

Nun ist für kleine $d\varphi$

$$\sin(\varphi + d\varphi) = \sin(\varphi) \cos(d\varphi) + \cos(\varphi) \sin(d\varphi) = \sin(\varphi) + \cos(\varphi)d\varphi$$

Und

$$n(h - dh) = n(h) - \frac{dn}{dh}dh$$

Somit ergibt sich

$$\frac{n(h) - \frac{dn}{dh}dh}{n(h)} = \frac{\sin(\varphi) + \cos(\varphi)d\varphi}{\sin(\varphi)}$$

Gekürzt und mit der Relation $\cos(\varphi) = \frac{dh}{ds}$ ergibt sich so

$$d\varphi = -\frac{1}{n(h)} \frac{dn}{dh} \sin(\varphi) ds$$

- b) Die Krümmung des Lichtstrahls ergibt sich als $\frac{d\varphi}{ds}$

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{n(h)} \frac{dn}{dh} \sin(\varphi) = \frac{1}{1 + (n_0 - 1)e^{-h/H}} \frac{(n_0 - 1)e^{-h/H}}{H} \sin(\varphi) = \frac{(n_0 - 1) \sin(\varphi)}{He^{h/H} + H(n_0 - 1)}$$

Die Krümmung wird demnach Maximal für $h \rightarrow 0$. Für $h \rightarrow \infty$ nimmt die Krümmung stetig ab.

Für den Ablenkwinkel zwischen wirklichem und scheinbarem Sonnenstand ergibt sich mit der Näherung

$$\varphi \approx \varphi(0) = \pi/2 \quad n(h) \approx n_0$$

sowie, da sich die Höhe in Abhängigkeit zur Laufstrecke mit

$$(h + R)^2 = s^2 + R^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{s^2 + R^2} - R$$

zu

$$h(s) \approx h(0) + h'(0)s + \frac{h''(0)}{2}s^2 = 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{0 - R^2}}s^2$$

nähern lässt, als das Integral über die Strecke

$$\varphi = \int_0^\infty \frac{1}{n_0} \frac{(n_0 - 1)}{H} e^{-\frac{s^2}{2RH}} \sin(\pi/2) ds = \frac{n_0 - 1}{Hn_0} \frac{\sqrt{2RH}\pi}{2}$$

Für die Abweichung durch die Brechung in der Atmosphäre ergibt sich also

$$\varphi = \frac{0.0003}{8km \cdot 1.0003} \frac{\sqrt{2 \cdot 8km \cdot 6367km \cdot \pi}}{2} \approx 0.0106$$

Nach der Dreisatzgleichung

$$\frac{24h}{2\pi} = \frac{t}{\varphi}$$

ergibt sich für die Zeit t

$$t = \frac{0.0106}{2\pi} 1440min \approx 2min 26s$$

Die Beugung in der Atmosphäre ist ebenfalls für die Abflachung der Sonne beim Sonnenuntergang/aufgang verantwortlich. Dabei werden Lichtstrahlen mit einem längeren Lichtweg durch die Atmosphäre stärker abgelenkt. Daher erfährt ein Lichtstrahl vom oberen Rand der Sonne weniger Ablenkung als ein Lichtstrahl vom unteren Rand. Dies bewirkt eine Verringerung des senkrechten (zur Erdoberfläche) Sichtwinkel während der vertikale Sichtwinkel nicht verändert wird. Die Sonne wirkt abgeflacht.

Übungsblatt 3 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 17: Fresnelsche Formeln

- a) Betrachtet man eine Grenzfläche bei $z = 0$ zweier Medien mit n_1 für $z < 0$ und n_2 für $z > 0$ und wählt das Koordinatensystem so, dass die Einfallsebene der xz -Ebene entspricht ergibt sich für eine senkrecht zur Einfallsebene polarisierte ebene monochromatische Welle, die Wellengleichung als

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = E_I^y \exp(i[\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r}]) \underline{e}_y$$

An der Grenzfläche sind nun die Normalkomponenten der dielektrischen Verschiebung (ohne Flächenladung) stetig, so wie die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes (bezogen auf die Grenzfläche). Für die Reflektierten und Transmittierten Wellen ergeben sich die Bedingungen

$${}^t \underline{E}_I(z=0) + {}^t \underline{E}_R(z=0) = {}^t \underline{E}_T(z=0)$$

und

$$\varepsilon_1 {}^n \underline{E}_I(z=0) + \varepsilon_1 {}^n \underline{E}_R(z=0) = \varepsilon_2 {}^n \underline{E}_T(z=0)$$

wobei sich die Tangentialkomponenten aus der x und y Komponente des Feldes zusammensetzt, während die Normalkomponente der z Komponente der Felder entspricht. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich so mit allgemeinem Ansatz für die reflektierte und transmittierte Welle

$$\varepsilon_1 E_R^z = \varepsilon_2 E_T^z$$

Komponentenweise Betrachtung der Tangentialkomponenten liefert für die x -Komponenten

$$E_R^x = E_T^x$$

Aus der Divergenzfreiheit des Elektrischen Feldes ergeben sich zwei weitere Bedingungen an die elektrischen Feldvektoren, nämlich

$$\nabla(E_R) = -ik_1^x E_R^x + ik_1^z E_R^z = 0$$

und für die transmittierte Welle

$$\nabla(E_T) = -ik_2^x E_T^x - ik_2^z E_T^z = 0$$

Das durch die letzten vier Gleichungen gegebene Gleichungssystem hat nur eine triviale Lösung, also

$$E_R^x = E_R^z = E_T^x = E_T^z = 0$$

- b) Neben der Bedingung

$$E_I^y + E_R^y = E_T^y$$

aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes ergibt sich aus der Feldverhalten der Tangentialkomponenten des \underline{B} -Feldes

$$\mu_1 {}^t (\underline{B}_I + \underline{B}_R) = \mu_2 {}^t \underline{B}_T$$

mit der Relation $\omega \underline{B} = \underline{k} \times \underline{E}$

$$\mu_1^t (\underline{k}_I \times \underline{E}_I + \underline{k}_R \times \underline{E}_R) = \mu_2^t (\underline{k}_T \times \underline{E}_T)$$

da nun $k_I^y = k_R^y = k_T^y = 0$, $\mu_1 \approx \mu_2$ und die Ergebnisse der ersten Aufgabe gelten ergibt sich

$$k_I^z E_I^y + k_R^z E_R^y = k_T^z E_T^y$$

Mit Substitution von $k_1^z := k_I^z = -k_R^z$ und $k_2^z := k_T^z$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$E_I^y - E_R^y = \frac{k_2^z}{k_1^z} E_T^y$$

Somit ergibt sich der Reflektions-/Transmissionskoeffizient aus der am Anfang des Abschnitts beschriebenen und der letzten Gleichung mit $k_1 = \cos(\alpha)k_1^z$ und $k_2 = \cos(\beta)k_2^z$ als:

$$\begin{aligned} R &= \frac{E_R}{E_I} = \frac{1 - \frac{k_2^z}{k_1^z}}{1 + \frac{k_2^z}{k_1^z}} = \frac{k_1^z - k_2^z}{k_1^z + k_2^z} \\ &= \frac{k_1 \cos \alpha - k_2 \cos \beta}{k_1 \cos \alpha + k_2 \cos \beta} \\ &= \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \\ T &= \frac{E_T}{E_I} = 2 \frac{1}{1 + \frac{k_2^z}{k_1^z}} = \frac{2k_1 \cos \alpha}{k_1 \cos \alpha + k_2 \cos \beta} \\ &= \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \end{aligned}$$

- c) Für den Übergang zwischen Medien mit $n_1 < n_2$ gilt für die Winkel immer $\alpha \geq \beta$. Für $\alpha = \beta = \pi/2$ ergibt sich der Reflektionskoeffizient wie erwartet durch

$$R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Der Reflektionskoeffizient ist über den gesamten Winkelbereich negativ, das heisst die reflektierte Welle erfährt an der Grenzschicht einen Phasensprung von π . Für $\alpha \rightarrow 0$ nähert sich der Reflektionskoeffizient gerade dem Wert $R = -1$ annimmt. Mit wachsendem Winkel nimmt die Reflektion zu.

- d) Im Fall eines dichteren Übergangs, also $n_1 > n_2$ ist der Reflektionskoeffizient für $\alpha = 0$ wie oben durch

$$R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Dabei ist der Reflektionskoeffizient immer positiv, es gibt demnach keine Phasenverschiebung bei der Reflektion. Für wachsende Winkel mit $\alpha < \alpha_0$ nähert sich R dem Wert 1, den er bei $\alpha = \alpha_0$ gerade annimmt.

Allgemein gilt für $\cos(\beta)$

$$\cos(\beta) = \sqrt{1 - \sin(\beta)^2} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin(\alpha)^2} = \sqrt{1 - \frac{\sin(\alpha)^2}{\sin(\alpha_0)^2}}$$

Für Werte von $\alpha > \alpha_0$ wird also der Reflektionskoeffizient komplex. Mit den Abkürzungen $a = \frac{n_1}{n_2} \sin(\alpha)$ und $b = \sqrt{\frac{\sin(\alpha)^2}{\sin(\alpha_0)^2} - 1}$ ist nun der Reflektionskoeffizient

$$R = \frac{a - ib}{a + ib} = \frac{(a - ib)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + i \frac{-2ab}{a^2 + b^2}$$

Jede komplexe Zahl lässt sich in der Polardarstellung darstellen als $z = \rho e^{i\varphi}$. Für das Modul ρ gilt nun

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-2ab}{a^2 + b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = 1$$

Für φ ergibt sich

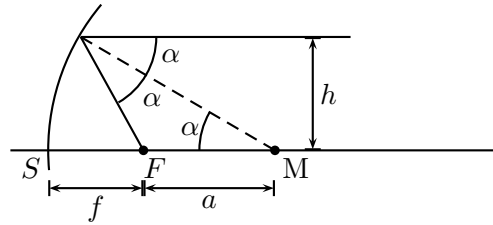
$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cos(\alpha)^2 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin(\alpha)^2 + 1}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cos(\alpha)^2 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin(\alpha)^2 - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 (\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2) + 1}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - 1} = \frac{n_1^2 \cos(2\alpha) + n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \end{aligned}$$

Da die Beziehung $E_R = E_I \cdot R$ gilt ist die reflektierte Welle bei $\alpha > \alpha_0$ zu der ursprünglichen Welle phasenverschoben. Die Verschiebung ist abhängig vom Winkel α der Reflexion. Da aber das Modul der reflektierten Welle im Falle von $\alpha > \alpha_0$ stets Eins wird, entspricht der Amplitudenbetrag der reflektierten Welle dem der Ursprünglichen.

Übungsblatt 4 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 18: Hohlspiegel

a) Sei der Krümmungsradius des Hohlspiegels R



Die Brennweite des Spiegels für einen Strahl in der Höhe h von der optischen Achse ergibt sich nun als:

$$f = R - a$$

Für die Strecke a gilt nun im gleichschenkligen Dreieck

$$\cos(\alpha) = \frac{R/2}{a} \Rightarrow a = \frac{R}{2 \cos(\alpha)}$$

Für den Sinus des Einfallswinkels gilt aber

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{R}$$

Somit ist

$$f = R - a = R - \frac{R}{2 \cos(\alpha)} = R - \frac{R}{2\sqrt{1 - \sin(\alpha)^2}} = R - \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - h^2}}$$

Eine Abbildung durch einfache Reflexion wird dann nicht mehr möglich, wenn die Brennweite Null oder kleiner wird, da hier der Strahl auf dem Weg zum Brennpunkt ein zweites mal am Spiegel reflektiert wird. Somit ist

$$0 = R - \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - h_{max}^2}} \Rightarrow h_{max} = \sqrt{\frac{3}{4}}R$$

Parallele Lichtstrahlen, die einen größeren Abstand zur optischen Achse als h_{max} haben, werden also nicht mehr auf der optischen Achse fokussiert. Objekte deren vertikale Ausdehnung größer als h_{max} ist, werden also sich vollständig abgebildet, da die mehrfach reflektierten Strahlen nicht zur Fokussierung beitragen.

b) Es ist zu zeigen, dass für parallel einfallende Strahlen nur ein Brennpunkt ein Brennpunkt existiert. Mit

$$(r, \alpha r^2)$$

ist eine Parabel parametrisiert. Nun ist zu zeigen, dass der Winkel zwischen einfallendem Strahlen und Normale, dem Winkel zwischen Parabelnormalen und dem Verbindungsvektor eines festen (Brenn-)Punkt auf der z -Achse mit der Parabel gleich sind.

Ist e der einfallende Strahlenvektor, sowie b der Vektor vom Brennpunkt $(0, f)$ zum Parabelpunkt und n der Normalenvektor an die Parabel, so gilt:

$$\frac{e \cdot n}{|e| |n|} = \sin(\alpha) = \sin(\alpha') = \frac{b \cdot n}{|b| |n|}$$

Der Vektor e kann gewählt werden als $(0, -1)$ parallel zur optischen Achse, der normalenvektor ergibt sich durch Differentiation der Parametrisierung als

$$n = (-2\alpha r, 1)$$

während für den Verbindungsvektor b gilt:

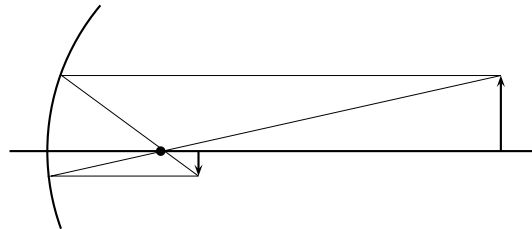
$$b = (r, \alpha r^2) - (0, f) = (r, \alpha r^2 - f)$$

Nun gilt

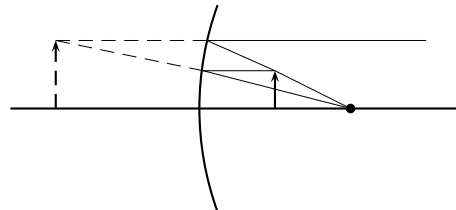
$$\begin{aligned} \frac{e \cdot n}{|e| |n|} &= \frac{b \cdot n}{|b| |n|} \\ -1 &= \frac{b \cdot n}{|b|} \\ -\sqrt{r^2 + (\alpha r^2 - f)^2} &= -2\alpha r^2 + \alpha r^2 - f \\ r^2 + (\alpha r^2 - f)^2 &= (\alpha r^2 + f)^2 \\ r^2 + \alpha^2 r^4 - 2\alpha r^2 f + f^2 &= \alpha^2 r^4 + 2\alpha r^2 f + f^2 \\ r^2 &= 4\alpha r^2 f \\ f &= \frac{1}{4\alpha} \end{aligned}$$

Damit ist der Brennpunkt unabhängig vom Abstand des einfallenden Strahles zur optischen Achse.

- c) Die optische Abbildung eines Gegenstands im Abstand $2R$ vom Spiegel



Es entsteht ein reelles achsenspiegeltes verkleinertes Abbild des Gegenstands. Die optische Abbildung eines Gegenstands im Abstand $R/4$ vor dem Spiegel



Es entsteht ein virtuelles nicht achsenspiegeltes vergrößertes Abbild des Gegenstands

Übungsblatt 4 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 19: Eikonalgleichung

a) Für den allgemeinen Ansatz einer ebenen monochromatischen Welle

$$E = A \exp(i\omega t - ik_0 S(r))$$

gilt für

$$\begin{aligned} \nabla^2 E &= \nabla(-Aik_0 \nabla S \exp(i\omega t - ik_0 S(r))) \\ &= -iak_0 \nabla^2 S \exp(i\omega t - ik_0 S(r)) - Ak_0^2 (\nabla S)^2 \exp(i\omega t - ik_0 S(r)) \end{aligned}$$

und für

$$\frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 E = -\frac{n^2}{c^2} \omega^2 A \exp(i\omega t - ik_0 S(r))$$

Nach der Wellengleichung ist nun

$$\nabla^2 E = \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 E$$

und eingesetzt mit der Abkürzung $\varphi = \omega t - k_0 S(r)$

$$-iak_0 \nabla^2 S \exp(i\varphi) - Ak_0^2 (\nabla S)^2 \exp(i\varphi) = -\frac{n^2}{c^2} \omega^2 A \exp(i\varphi)$$

oder gekürzt

$$\frac{n^2}{c^2} \omega^2 = ik_0 \nabla^2 S + k_0^2 (\nabla S)^2$$

Da nun $k_0 = \omega/c$ ergibt sich

$$(\nabla S)^2 = n^2 - \frac{i\lambda_0}{2\pi} \nabla^2 S$$

b) Besser als die Forderung $\lambda_0 \rightarrow 0$ ist die Forderung $\lambda/L \ll 1$. Dabei ist

$$L = \frac{2i\pi}{\nabla^2 S}$$

Dabei ist $\nabla^2 S$ gegeben durch das Verhältnis von Brechungsindex zu dessen Divergenz also $n/|\nabla n|$. Die Länge L .

c) Für die Funktion $S(r) = a \cdot r$ gilt für

$$\nabla S = a$$

Somit erfüllt $a \cdot r$ die Eikonalgleichung, wenn $|a| = n$, denn hier ist $(\nabla(a \cdot r))^2 = a^2 = n^2$. Analog erfüllt die Gleichung $S = \alpha|r|$ die Eikonalgleichung, wenn $\alpha = n$, denn

$$\nabla \alpha|r| = \alpha \nabla|r| = \alpha \frac{r}{|r|}$$

und damit ist $(\nabla\alpha|r|)^2 = \alpha^2$.

Für den ersten Fall ergibt sich das Vektorfeld

$$s(r) = \frac{1}{n(r)} \nabla S = \frac{a}{n(r)}$$

und im zweiten Fall

$$s(r) = \frac{1}{n(r)} \nabla S = \frac{\alpha}{n(r)} \frac{r}{|r|}$$

d) Für die Rotation der mit dem Brechungsindex gewichteten Funktion s gilt

$$\nabla \times ns = \nabla \times \nabla S = 0$$

da die Rotation eines Gradientenfeldes immer den Wert Null ergibt. In einem rotationsfreien Feld ergibt sich das Wegintegral unabhängig vom Weg als

$$\Lambda = \int_P^{P'} n(r)s(r) = S(P') - S(P)$$

e) Legt man ein Flächenelement so an die Grenzfläche zwischen Medium 1 und Medium 2, dass der eine Rand \overline{AB} in Medium 1 und der andere \overline{CD} in Medium 2 verläuft, ist

$$\text{rot}(ns) = 0 = \int_{\gamma} \text{rot}(ns)$$

Nach dem Stokesschen Satz ist nun

$$\oint_{\partial\gamma} ns = 0$$

Die Kanten DA und BC werden in jedem Medium jeweils einmal durchlaufen, so dass

$$\oint_{\partial\gamma} ns = \int_A^B n_1 s_1 + \int_C^D n_2 s_2$$

Wählen wir nun den Ansatz eines kollimierten Strahls, also

$$s(r) = \frac{1}{n} a_i \quad |a_i| = n_i$$

so ist, da AB in positiver und CD in negativer Richtung durchlaufen wird sowie die Strecken gleich lang sind

$$a_1 \cdot l - a_2 \cdot l = 0$$

Mit der Definition des Vektorproduktes und dem Einfallswinkel α , sowie dem Brechungswinkel β ist

$$|a_1| |l| \cos(90 - \alpha) = |a_2| |l| \cos(90 - \beta)$$

Da nun die Länge der Vektoren a_i durch die Brechzahl gegeben ist gilt

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$$

Übungsblatt 5 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 21: Linsen

a) Für die Brennweite einer dünnen Linse gilt

$$\frac{1}{f} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

wobei n_1 die Brechzahl im Medium außerhalb der Linse bezeichnet. Das Verhältnis der Brennweiten ergibt einen Skalierungsfaktor für einen Wechsel in ein anderes Medium

$$k := \frac{f_n}{f_l} = \frac{n_2 - 1}{n_2 - n_1}$$

Damit ist die Brennweite in einem anderen Medium einfach durch das Produkt aus Brennweite in Luft f_L und dem Faktor k gegeben:

$$f_n = k \cdot f_L$$

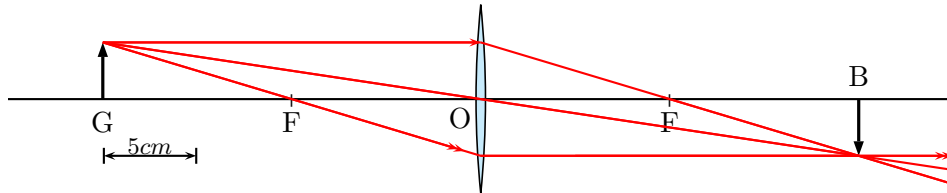
Für die Krümmungsradien $R_1 = 20\text{cm}$, $R_2 = -20\text{cm}$ und einer Brechzahl der Linse $n_2 = 1.5$ gilt in Luft

$$f_L = \frac{1}{n_2 - 1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 2 \cdot 10\text{cm} = 20\text{cm}$$

In Wasser mit $n_1 = 4/3$ gilt

$$f_L = \frac{1}{n_2 - n_1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 6 \cdot 10\text{cm} = 60\text{cm} = 3 \cdot 20\text{cm} = \frac{n_2 - 1}{n_2 - n_1} f_L$$

b) Die Abbildung einer Sammellinse mit einer Brechkraft von $D = 10\text{cm}$ von einem Gegenstand im Abstand $g = 20\text{cm}$ mit der Gegenstandsgröße $G = 3\text{cm}$



Nach der Zeichnung ist die Bildweite gleich der Gegenstandsweite $b = 20\text{cm}$, sowie die Vergrößerung $V = -1$.

Rechnerisch folgt aus der Abbildungsgleichung $D = 1/g + 1/b$

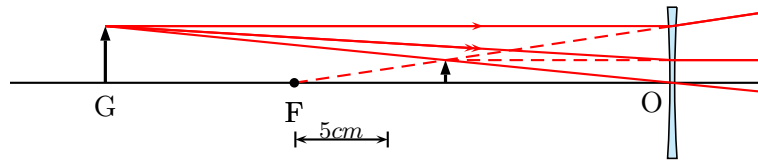
$$b = \frac{g}{g \cdot D - 1} = \frac{20\text{cm}}{20\text{cm} \cdot 0.1 \frac{1}{\text{cm}} - 1} = 20\text{cm}$$

Für die Vergrößerung gilt nun

$$V = -\frac{b}{g} = -\frac{20\text{cm}}{20\text{cm}} = -1$$

Es entsteht also ein reelles umgekehrtes Abbild des Gegenstands

- c) Die Abbildung einer Streulinse mit $f = -20\text{cm}$ eines Gegenstands der Größe $h = 3\text{cm}$ im Abstand $g = 30\text{cm}$.



Nach der Zeichnung im Maßstab 1 : 4 ergibt sich die Bildweite als $b \approx -12\text{cm}$ und die Vergrößerung als $V \approx 0.4$

Rechnerisch folgt aus der Abbildungsgleichung

$$b = \frac{f \cdot g}{g - f} = \frac{-600\text{cm}^2}{50\text{cm}} = -12\text{cm}$$

sowie die Vergrößerung

$$V = -\frac{b}{g} = \frac{12\text{cm}}{30\text{cm}} = 0.4$$

Es entsteht hierbei ein virtuelles aufrechtes und verkleinertes Abbild des Gegenstands.

- d) Für eine Gegenstandsweite von $g = 5\text{cm}$ ergibt sich für die Anordnung aus b)

$$b = \frac{g}{g \cdot D - 1} = \frac{5\text{cm}}{5\text{cm} \cdot 0.1 \frac{1}{\text{cm}} - 1} = -10\text{cm}$$

sowie für die Vergrößerung

$$V = -\frac{b}{g} = \frac{5\text{cm}}{10\text{cm}} = 0.5$$

Es entsteht ein virtuelles Verkleinertes und aufrechtes Abbild des Gegenstands.

Für die Anordnung aus c) ergibt sich für eine Gegenstandsweite von $g = 5\text{cm}$ eine Bildweite von

$$b = \frac{f \cdot g}{g - f} = \frac{-100\text{cm}^2}{25\text{cm}} = -4\text{cm}$$

und eine Vergrößerung von

$$V = -\frac{b}{g} = \frac{4\text{cm}}{5\text{cm}} = 0.8$$

Auch hier entsteht ein virtuelles, verkleinertes und aufrechtes Abbild des Gegenstands.

- e) Für einen Gegenstand, der $d = 2.4\text{m}$ von einem Schirm entfernt ist, und eine durch eine Linse mit der Brennweite f scharf auf dem Schirm abgebildet wird gilt, wenn durch verschieben der Linse um a ein reelles Bild entsteht.

$$b_1 + g_1 = d \quad b_2 + g_2 = d$$

sowie für die Relationen der beiden Abbildungen

$$b_1 - b_2 = a \quad g_1 - g_2 = -a$$

Hierbei sind $b/g_{1/2}$ die Bild- bzw Gegenstandsweiten vor bzw nach dem Verschieben, und die Verschiebung findet nach rechts statt. Da diese Bedingungen linear abhängig sind, wird eine zusätzliche Bedingung zur Eindeutigkeit benötigt. Diese ergibt sich aus der Abbildungsgleichung:

$$\begin{aligned} f &= \frac{g_1 b_1}{b_1 + g_1} = \frac{g_1 b_1}{d} = \frac{(g_2 - a)(b_2 + a)}{b_2 + g_2} \\ &= \frac{g_2 b_2}{b_2 + g_2} + \frac{a(g_2 - b_2) + a^2}{b_2 + g_2} = f + \frac{a(g_2 - b_2) + a^2}{b_2 + g_2} \\ \Rightarrow 0 &= (g_2 - b_2) + a \end{aligned}$$

Aus den Bedingungen ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

bzw die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{2} - \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{d}{2} + \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{d}{2} + \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{d}{2} - \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbildweite, also der Abstand der Linse vom Schirm gilt so

$$b_1 = \frac{d}{2} + \frac{a}{2} = 1.2m + 0.6m = 1.8m$$

Die Brennweite ergibt sich als

$$f = \frac{g_1 b_1}{g_1 + b_1} = \frac{d^2 - a^2}{4d} = \frac{9}{20}m = 0.45m$$

Übungsblatt 5 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 24: Wellenleiter

- a) Im zylindrischen Wellenleiter soll eine transversal elektrische Wellen angenommen werden. Es gilt also

$$\underline{E}(r, t) = \underline{E}^0(x, y)e^{i\omega t - ikz}$$

Wobei $E_z^0 = 0$ gilt. Für das magnetische Feld gilt nun

$$\underline{B}(r, t) = \frac{i}{\omega} \nabla \times \underline{E} = \frac{i}{\omega} ((\nabla \times \underline{E}^0) - ik\underline{E}^0)e^{i\omega t - ikz}$$

Da nun $E_z^0 = 0$ und $E^0(x, y)$ nur von den Variablen x und y Abhängen ergibt die Rotation von \underline{E}^0 nur eine z -Komponente, so dass

$$B_z^0 = \frac{i}{\omega} \partial_x E_y^0 + \partial_y E_x^0$$

Die z -Komponente des B -Feldes ist also auch von den Variablen x und y abhängig, so dass nach der Wellengleichung mit der Abkürzung $\varphi = \omega t - kz$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 B_z + (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) B_z \\ &= \varepsilon \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 B_z^0 e^{i\varphi} + (\partial_x^2 + \partial_y^2) B_z^0 e^{i\varphi} + \partial_z^2 B_z^0 e^{i\varphi} \\ &= \varepsilon \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 B_z^0 e^{i\varphi} + (\partial_x^2 + \partial_y^2) B_z^0 e^{i\varphi} - k^2 B_z^0 e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Bedingung für die z Komponente des B -Feldes

$$\left(\varepsilon \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 \right) B_z^0 = 0$$

Im transversal magnetischen Fall ergibt sich das E -Feld aus dem Ansatz für das B -Feld aus der Maxwellschen Gleichung $\nabla \times \underline{H} = \dot{\underline{D}}$ zu

$$\underline{E} = i \frac{c^2}{\omega \varepsilon \mu} \nabla \times \underline{B}$$

Analoge Argumentation zu oben liefert

$$E_z^0 = i \frac{c^2}{\omega \varepsilon \mu} \partial_x B_y^0 + \partial_y B_x^0$$

Auch hier ist die z -Komponente des E -Feldes nicht von z abhängig, so dass die Wellengleichung die Bedingung liefert

$$\left(\varepsilon \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 \right) E_z^0 = 0 \tag{1}$$

Die Konstante α in der angegebenen Form ergibt sich so als

$$\alpha = \varepsilon \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$$

- b) Im TM Fall muss für die Grenzfläche die Tangentiale Komponente des Elektrischen Feldes stetig sein. In diesem Fall ergibt sich die tangentielle Komponente des E -Feldes gerade durch die z -Komponente. Da im idealen Leiter $E = 0$ gilt, muss also

$$E_z^0|_R = 0$$

- c) Der Ausdruck des Laplace-Operators in Polarkoordinaten (2-Dimensional, da hier die z -Abhängigkeit nicht gegeben ist) ist gegeben durch

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)A = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\phi\right)A$$

Für den Ansatz $E_z^0 = E(\rho) \cos(n\phi)$ mit $\rho = \beta r$ ist

$$\partial_r^2 E_z^0 = \beta^2 \partial_\rho^2 E(\rho) \cos(n\phi)$$

sowie

$$\frac{1}{r}\partial_r E_z^0 = \frac{\beta}{\rho}\partial_r E_z^0 = \frac{\beta^2}{\rho}\partial_\rho E(\rho) \cos(n\phi)$$

und

$$\frac{1}{r^2}\partial_\phi E_z^0 = \frac{\beta^2}{\rho^2}\partial_\phi^2 E(\rho) \cos(n\phi) = -\frac{\beta^2}{\rho^2}n^2 E(\rho) \cos(n\phi)$$

Da E_z^0 die Bedingung aus Gleichung (1) erfüllt ist also nun

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\alpha + \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\phi\right) E_z^0 \\ &= \left(\alpha + \beta^2 \partial_\rho^2 + \frac{\beta^2}{\rho^2}\partial_\rho - \frac{\beta^2}{\rho^2}n^2\right) E(\rho) \cos(n\phi) \\ &= \left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \left(\frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{n^2}{\rho^2}\right)\right) E(\rho) \cos(n\phi) \end{aligned}$$

Da diese Bedingung für alle ϕ erfüllt sein muss, gilt so für $E(\rho)$

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \left(\frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{n^2}{\rho^2}\right)\right) E(\rho)$$

Damit die Gleichung die angegebene Form hat muss demnach

$$\beta^2 = \alpha$$

Die Differentialgleichung wird durch die Besselschen und Webberschen Funktionen gelöst. Da die Webbersche Funktion in Null eine Singularität aufweist, kann diese als Lösung ausgeschlossen werden. Es ist

$$E_z^0 = E_0^0 J_n(\rho) = E_0^0 J_n(\beta r)$$

Mit den Randbedingungen aus teil b) folgt nun ein Diskreter Wert für β , je nach gewähltem n . Ist x_n die erste Nullstelle der Funktion J_n , so ist

$$\beta_n = \frac{x_n}{R}$$

Da nun $\alpha = \beta^2$ folgt für die Frequenz

$$\varepsilon \frac{\omega_n^2}{c^2} - k^2 = \beta_n^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\beta_n^2 + k^2}$$

Für die ersten Nullstellen der Besselfunktionen gilt

$$0 < x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

somit gilt für die Beziehung der Frequenzen

$$\omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_n$$

Die Lösung mit der niedrigsten Frequenz lautet demnach

$$E_z^0 = E_0^0 J_0(\beta_0 r) \quad \beta_0 = \frac{x_n}{R} \approx \frac{2.40}{R}$$

Hierbei ist die Dispersionsrelation gegeben durch

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\beta_0^2 + k^2}$$

Hieraus ergibt sich die Phasengeschwindigkeit als

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{k\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\beta_0^2 + k^2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\beta_0^2}{k^2} + 1}$$

sowie die Gruppengeschwindigkeit als

$$\partial_k \omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{k}{\sqrt{\beta_0^2 + k^2}}$$

- d) Im Fall eines Lichtwellenleiters kann analog zu den vorher genannten Lösungsweg verfahren werden. Allerdings ergibt sich hier die Randbedingung etwas anderes. Hierbei muss die z -Komponente des Elektrischen Felds nicht notwendigerweise bei $r = R$ verschwinden, sondern vielmehr einer Ungleichung, die sich aus der Totalreflektionsbedingung ergibt, genügen. Somit kann γ_0 bestimmt werden. Auch hierbei gilt

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n$$

Aus analogen Überlegungen folgt dann

$$\omega = \frac{c}{n} \sqrt{\gamma_0^2 + k^2}$$

sowie

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \sqrt{\frac{\gamma_0^2}{k^2} + 1} \quad v_g = \partial_k \omega = \frac{k}{\sqrt{\gamma_0^2 + k^2}}$$

- e) Außerhalb des LWL fällt die elektrische Feldstärke exponentiell ab. Hier gilt für $E(\rho)$ die modifizierte Besselsche Differentialgleichung. Diese wird durch die modifizierten Besselschen Funktionen I_n und K_n gelöst. Die Lösung I_n kann hier wegen der Divergenz für große Argumente als unphysikalisch ausgeschlossen werden. Für $r > R$ muss also gelten

$$E_0^z(r) = AK_0(\delta_0 r)$$

wobei A und δ_0 noch zu bestimmen sind.

Zunächst die Stetigkeitsbedingung für das E -Feld der entsprechenden Fläche. Die Tangentialkomponente des E -Feldes, also auch E_z^0 , muss an der Grenzfläche stetig sein. Für die Grenzfläche gilt außerdem die Stetigkeit der Tangentialkomponenten des B -Feldes, da die $\mu \approx 1$. Da nun die Tangentialkomponente durch die Rotation des E -Feldes gegeben ist, gilt bei $r = R$:

$$B_\phi = \frac{i}{\omega} (\nabla \times E)_\phi = \frac{i}{\omega} \left(\underbrace{\partial_z E_r}_{=0} - \partial_r E_z \right)$$

Somit ist die z -Komponente des elektrischen Feldes auch stetig differenzierbar. Aus der ersten Bedingung folgt so

$$E_0^0 J_0(\gamma_0 R) = AK_0(\delta_0 R)$$

Die Stetigkeit der Ableitungen liefert

$$\gamma_0 E_0^0 J_0'(\gamma_0 R) = \delta_0 AK_0'(\delta_0 R)$$

Kombinieren der Gleichungen ergibt

$$\delta_0 = \frac{K_0(\delta_0 R) J_0'(\gamma_0 R)}{K_0'(\delta_0 R) J_0(\gamma_0 R)} \gamma_0$$

Wobei sich ρ durch Multiplikation mit δ_0 aus r ergibt.

Übungsblatt 6 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 26: Kreisinterferometer

- a) Ein Strahl, der in das Interferometer im Eingang B eingekoppelt wird und das Interferometer an Ausgang B verlässt erfährt aufgrund der Reflexion an optisch dichteren Medien (Spiegel) egal in welcher Richtung das Interferometer durchlaufen wird eine Phasenverschiebung von 2π aufgrund von 4 Reflexionen. An Ausgang B ist also konstruktive Interferenz zu beobachten.

Ein Strahl, der in B eingekoppelt wird und das Interferometer bei A verlässt, erfährt einen von der Durchlaufrichtung abhängige Phasenverschiebung aufgrund unterschiedlicher Anzahl von Reflexionen an optisch dichteren Medien. Beim Durchlaufen im Uhrzeigersinn ist die Phase beim Verlassen um 3π , während ein Strahl, der das Interferometer gegen den Uhrzeigersinn umläuft eine Phase um 4π verschoben hat. Somit ist am Ausgang A eine destruktive Interferenz wahrzunehmen.

- b) Die Phasendifferenz $\Delta\phi$ zwischen den Lichtstrahlen ergibt sich als das doppelte der Phasendifferenz, die ein Lichtstrahl beim Durchlaufen des rotierenden und des ruhenden Systems hätte. Für die Phasenverschiebung $d\phi$ die beim Durchlaufen einer kleinen Strecke entsteht gilt also:

$$\frac{\Delta\phi}{2} = \oint_{\partial F} d\phi$$

Die Phasenverschiebung beim Durchlaufen einer Strecke $d\vec{l}$ parallel zur y -Achse ist proportional zur y Koordinate. Ist nun $\Omega \cdot x \ll c$ so rechtfertigt dies:

$$d\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} -\frac{\Omega}{c}y \\ \frac{\Omega}{c}x \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{l}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\phi}{2} &= \frac{2\pi\Omega}{\lambda c} \oint_{\partial F} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{l} \\ &= \frac{2\pi\Omega}{\lambda c} \int_F \text{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \hat{n}_F dO = \frac{4\pi\Omega}{\lambda c} \int_F dO \\ &= \frac{4\pi\Omega}{\lambda c} F \end{aligned}$$

- c) Fasst man die detektierbare Intensitätsänderung δI als Prozentuale Änderung auf, so ist

$$\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{|E|^2 - |E \cdot \cos(\Delta\phi)|^2}{|E|^2} = \sin^2(\Delta\Phi)$$

Für die von einem LWL der Länge L n -mal umgebene Fläche F mit Radius R gilt nun

$$F = \pi R^2 n = \frac{\pi R^2 L}{2\pi R} = \frac{RL}{2}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} L &= \frac{2F}{R} = \frac{\Delta\phi\lambda c}{4\pi\Omega R} \\ &= \frac{\Delta\phi\lambda c T}{8\pi^2 R} = \frac{\arcsin(\sqrt{\delta I})\lambda c T}{8\pi^2 R} \end{aligned}$$

Für die angegebenen Werte ergibt sich so

$$L \approx 259.53m$$

- d) Die Phasendifferenz hängt aufgrund des Skalarprodukts zwischen Flächennormale und Rotationsachse Cosinusförmig vom Winkel θ zwischen den Achsen ab. Also

$$\Delta\phi = \frac{8\pi\Omega}{\lambda c} F \cos(\theta)$$

Mit einem Faserkreisel wird so die Messung des Winkels zwischen Drehachse und Flächennormale des Faserkreisels möglich. Damit ist eine genaue Bestimmung des Breitengrads möglich, wenn die Grundfläche des Faserkreisels auf der Erdoberfläche aufgebracht wird. Mit einer dazu senkrechten Kreiselanordnung lässt sich auch der Längengrad bestimmen.

Übungsblatt 6 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 28: Fraunhofer Beugung

a) Für die Phase der Welle am Punkt P gilt

$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi$$

Wobei ϕ_0 die Phase einer Welle, die von Punkt $x_0 = 0$ ausgeht darstellt. Der Phasenunterschied $\Delta\phi$ kommt durch einen längeren bzw. kürzeren optischen Weg von Punkt x der Blende zum Punkt P zustande. Hierbei gilt:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Die Amplitude der Welle in Punkt P erhält man nun durch integrieren der Phasendifferenzen über den Spalt. Für die elektrische Feldamplitude gilt so

$$E(P) \propto \int_{-d/2}^{d/2} dx e^{i\Delta\phi} = \int_{-d/2}^{d/2} dx e^{i2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}} = \int_{-d/2}^{d/2} dx e^{i2\pi \frac{\sin(\alpha)}{\lambda} x}$$

Somit ist $k(\alpha)$ gegeben durch:

$$k(\alpha) = \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\alpha)$$

b) Für die elektrische Feldamplitude gilt also

$$\begin{aligned} E(P) &\propto \int_{-d/2}^{d/2} dx e^{ik(\alpha)x} = \left[\frac{2}{2ik} e^{ik(\alpha)x} \right]_{-d/2}^{d/2} \\ &= \frac{\sin(k d/2)}{k/2} \end{aligned}$$

Für die Intensität am Punkt P gilt nun

$$I \propto |E|^2 \propto \frac{\sin(k d/2)^2}{(k/2)^2}$$

oder mit der Definition von k

$$I \propto \frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\alpha)\right)^2}{\frac{\pi^2}{\lambda^2} \sin(\alpha)^2}$$

c) Für die Abbildung paralleler Strahlen auf der Brennebene gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{f}$$

Für α gilt nach Teil b) ebenfalls

$$\sin(\alpha) = \frac{k\lambda}{2\pi}$$

Und somit ist

$$\frac{x}{f} = \tan \left(\arcsin \frac{\lambda k}{2\pi} \right) = \frac{k\lambda}{\sqrt{(2\pi)^2 - k^2\lambda^2}}$$

Für das erste Minimum muss gelten

$$k \frac{d}{2} = \pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{d}$$

Da dies eine Nullstelle der Intensität bedeutet. Somit ist

$$x(2\pi/d) = \frac{\frac{2\pi\lambda}{d}}{\sqrt{(2\pi)^2 - \frac{(2\pi)^2}{d^2}\lambda^2}} f = \frac{\lambda f}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}}$$

Mit den genannten Werten ergibt sich so

$$x \approx 0.0472m$$

Übungsblatt 7 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 29: Beugung an breiten Spalten

- a) Betrachtet man zwei Strahlen die von unterschiedlichen Punkten des Spaltes in Richtung θ ausgehen, so haben diese Gangunterschied von

$$\Delta s = \sin(\theta) \cdot x$$

und damit eine Phasendifferenz von

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta)x$$

Die Amplitude aller aus dem Spalt im unendlichem interferierenden Strahlen ergibt sich dann als

$$E = \int_{-b/2}^{b/2} E_0 e^{i\Delta\phi}$$

wobei E_0 die Amplitude einer Welle ist, die aus einem Punkt ausgesendet wurde. Da nun

$$I \propto |E|^2 \quad I_0 \propto |E_0 \cdot b|^2$$

ergibt sich die Intensität unter dem Winkel θ als

$$I(\theta) = \frac{I_0}{b^2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} e^{i\Delta\phi} \right)^2$$

Das Integral ergibt sich als

$$\begin{aligned} \int_{-b/2}^{b/2} e^{i\Delta\phi} &= \int_{-b/2}^{b/2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta)x} dx \\ &= \left[\frac{\lambda}{2i\pi \sin(\theta)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta)x} \right]_{-b/2}^{b/2} \\ &= \frac{\lambda}{\pi \sin(\theta)} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \sin(\theta)b\right) \end{aligned}$$

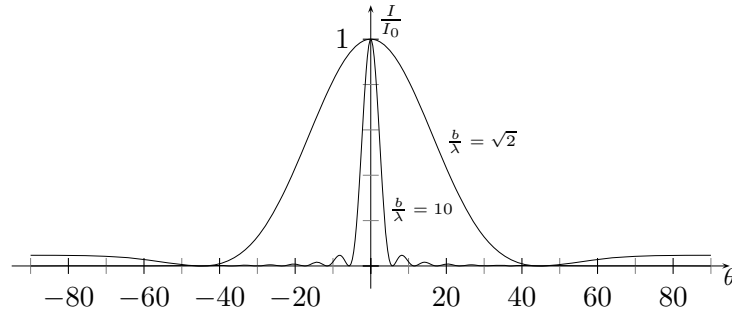
Somit ist

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\lambda}{\pi \sin(\theta)b} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \sin(\theta)b\right) \right)^2$$

Für die paraxiale Näherung des Winkels $\theta \approx \sin(\theta)$ gilt dann

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\theta b\right)^2}{\frac{\pi^2}{\lambda^2}\theta^2 b^2}$$

Die Intensitätsverteilung für die Winkel θ ergibt sich demnach zu



Mit wachsender Spaltbreite verringert sich also die Breite des Bildes, so dass das erste Intensitätsminimum unter einem geringeren Winkel zu finden ist. Für das erste Intensitätsminimum muss gelten

$$\frac{\pi}{\lambda} \sin(\theta_1) b = \pi$$

da hier die Sinusfunktion eine Nullstelle hat. Demnach ist

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{b}\right)$$

Die räumliche Breite x des zentralen Maximums auf einen Schirm im Abstand s dem Spalt und damit die Strahlbreite ergibt sich als der Abstand der ersten Minima. Es ist

$$\tan(\theta_1) = \frac{x}{2s}$$

Es ergibt sich so

$$x = 2s \tan(\theta_1) = 2s \tan(\arcsin(\lambda/b)) = 2s \frac{\lambda/b}{\sqrt{1 - (\lambda/b)^2}}$$

Für die angegebenen Werte ist

$$x \approx 0.52 \text{ mm}$$

Fällt anstatt monochromatisches Licht, weißes Licht auf den Spalt, so wird dieses Spektral zerlegt. Da der Ablenkwinkel für beispielsweise das erste Maximum mit steigender Wellenlänge wächst, sind so längere Wellenlängen weiter von Beugungsmittelpunkt entfernt.

- b) Im Falle eines Gitters führt eine analoge Überlegung dazu, dass sich die Amplitude der unter dem Winkel θ propagierenden Wellen durch Aufsummierung über alle Spalte ergibt. Sei nun

$$\tau(x) := \begin{cases} 1 & x \in [nd - b/2, nd + b/2], 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Folgenden seien nun die Abkürzungen

$$k := \frac{\pi}{\lambda} \sin(\theta)$$

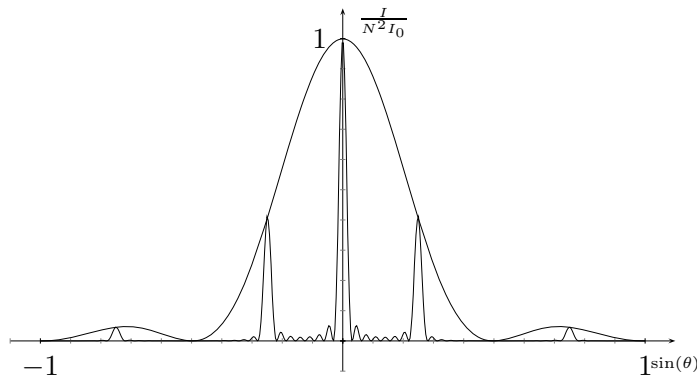
Für die Amplitude des überlagerten elektrischen Feldes gilt nun

$$\begin{aligned}
 E(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_0 e^{i\Delta\phi} \cdot \tau(x) dx \\
 &= E_0 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nd-b/2}^{nd+b/2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta)x} dx \\
 &= E_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{k} \frac{1}{2i} \left[e^{2ik(nd+b/2)} - e^{2ik(nb-b/2)} \right] \\
 &= E_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{i2kdn}}{k} \frac{1}{2i} \left[e^{ikb} - e^{-ikb} \right] \\
 &= E_0 \frac{\sin(kb)}{k} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i2kd} \right)^n = E_0 \frac{\sin(kb)}{k} \frac{e^{2ikdN} - 1}{e^{2ikd} - 1} \\
 &= E_0 \frac{\sin(kb)}{k} \frac{e^{2ikdN} - 1}{e^{2ikd} - 1} = E_0 \frac{\sin(kb)}{k} \frac{e^{ikdN} - e^{-ikdN}}{e^{ikd} - e^{-ikd}} \frac{e^{ikdN}}{e^{ikd}} \\
 &= E_0 \frac{\sin(kb)}{k} \frac{\sin(kdN)}{\sin(kd)} e^{ik(N-1)d}
 \end{aligned}$$

Analog zum ersten Teil der Aufgabe ergibt sich nun für die Intensität, wobei die Intensität I_0 die Intensität eines einzelnen Spaltes bezeichnet.

$$\begin{aligned}
 I(\theta) &= \frac{I_0}{b^2} \left| \frac{\sin(kb)}{k} \frac{\sin(kdN)}{\sin(kd)} e^{ik(N-1)d} \right|^2 \\
 &= I_0 \frac{\sin(kb)^2}{(kb)^2} \frac{\sin(kdN)^2}{\sin(kd)^2} \underbrace{\left| e^{ik(N-1)d} \right|^2}_{=1} \\
 &= I_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \sin(\theta)b\right)^2}{\left(\frac{\pi}{\lambda} \sin(\theta)b\right)^2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \sin(\theta)dN\right)^2}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \sin(\theta)d\right)^2}
 \end{aligned}$$

Für die angegebenen Werte ergibt sich das Beugungsbild als



Die Beugungsverteilung oder Einhüllende ist vom Ausdruck

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \sin(\theta)b\right)^2}{\left(\frac{\pi}{\lambda} \sin(\theta)b\right)^2}$$

bestimmt. Für eine größere Spaltbreite b wird demnach die Intensität der Hauptmaxima höherer Ordnung geringer.

Für wachsendes N nimmt die Anzahl der Nebenmaxima zwischen den Hauptmaxima zu und deren Intensität. Eine Variation in N verändert aber weder den Ort noch die Intensität der Hauptmaxima. Allerdings wird mit steigender Spaltanzahl die Breite der Hauptmaxima geringer.

Für einen wachsenden Spaltabstand d wird der Abstand zwischen den Maxima geringer. Die Hauptmaxima gewinnen dadurch an Intensität (bei gleichbleibender Spaltbreite) während sich die Breite der Maxima verringert. Für wachsendes d werden aufgrund der Einhüllenden zunehmend mehr Hauptmaxima sichtbar.

- c) Ein naiver Rechenansatz für den minimalen Einfallswinkeldifferenz δ einer Kamera ist durch den minimalen Pixelabstand Δx und der Brennweite f mit

$$\tan(\delta) = \frac{\Delta x}{f}$$

Damit ergeben sich für die Kameras mit (I) 2048^2 Pixel und (II) mit 4096^2 Pixel die Einfallswinkeldifferenz

$$\delta_I = 48.8 \cdot 10^{-6} \text{rad} \quad \delta_{II} = 24.4 \cdot 10^{-6} \text{rad}$$

oder die Winkelauflösungsvermögen als Reziprokwert.

Die Abbildung durch eine räumlich begrenzte Linse ist allerdings durch Beugungerscheinungen an der Linsenöffnung begrenzt. Hierbei ist die minimale Winkeldifferenz δ_{min} einfallender Lichtstrahlen gerade durch

$$\delta_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

gegeben, wobei D den Durchmesser des Objektivs bezeichnet. Bei einer Wellenlänge von $\lambda \approx 0.5 \mu\text{m}$ ergibt sich so eine kleinste Winkeldifferenz von

$$\delta_{min} = 64 \cdot 10^{-6} \text{rad}$$

Beide CCD-Sensoren sind in der Lage diesen Winkel aufzulösen. Demnach ergibt sich für beide Kameras eine Winkelauflösung δ_{min} und eine Winkelauflösungsvermögen W_δ von

$$\delta_{min} = 64 \cdot 10^{-6} \text{rad} \quad W_\delta = 16393/\text{rad}$$

was schon mit einer Pixelanzahl von 1640^2 realisierbar wäre.

Übungsblatt 7 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 31: Thomsonstreuung

- a) Für den Betrag des Poyntingvektors einer elektromagnetischen Welle mit Amplitude \underline{E}_0 und dem Wellenvektor \underline{k}_0 gilt mit der Abkürzung $\varphi := \omega t - \underline{k}_0 \underline{x}$

$$\begin{aligned}
 |\underline{S}| &= |\underline{E} \times \underline{H}| = \left| \underline{E} \times \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \right| \\
 &= \left| \frac{i}{\omega \mu_0} (\underline{E}_0 \times \underline{k}_0 \times \underline{E}_0) e^{i\varphi} \right| \\
 &= \left| \frac{i}{\omega \mu_0} (\underline{k}_0 \cdot (\underline{E}_0^2) - \underbrace{\underline{E}_0 \cdot (\underline{k}_0 \cdot \underline{E}_0)}_{=0}) e^{i\varphi} \right| \\
 &= \left| \frac{i}{\omega \mu_0} k_0 E_0^2 e^{i\varphi} \right| = \left| \frac{i}{\omega \mu_0} \frac{\omega}{c} E_0^2 e^{i\varphi} \right| \\
 &= \left| E_0^2 \frac{1}{\mu_0 c} \cdot i e^{i\varphi} \right| \\
 &= \frac{|\underline{E}_0|^2}{\mu_0 c}
 \end{aligned}$$

Trifft eine elektromagnetische Welle auf ein Elektron, so kann die Wirkung des magnetischen Feldes vernachlässigt werden. Demnach ist dann

$$\underline{F} = m_e \dot{\underline{v}} = -e \underline{E} = -e \underline{E}_0 e^{i\varphi}$$

Hiermit ergibt sich für das Quadrat des Beschleunigungsbetrags

$$\dot{\underline{v}}^2 = \frac{e^2}{m_e^2} E_0^2 |e^{i\varphi}|^2 = \frac{e^2}{m_e^2} E_0^2$$

Die vom Elektron gestreute Leistung ist dann

$$P = \frac{1}{6\pi} \frac{e^2}{\varepsilon_0 c^3} \dot{\underline{v}}^2 = 16\pi \frac{e^4}{\varepsilon_0 c^3 m_e} E_0^2$$

Für den Streuquerschnitt ergibt sich so

$$\sigma = \frac{P}{|\underline{S}|} = \frac{1}{6\pi} \frac{e^4 \mu_0}{\varepsilon_0 c^2 m_e^2} = \frac{1}{6\pi} \frac{e^4}{\varepsilon_0^2 c^4 m_e^2}$$

Den klassischen Elektronenradius erhält man aus der Vorstellung eines Elektrons als Kugel des Radius r_e mit der Gleichverteilten Oberflächenladung $-e$ dessen elektrostatische Energie der Ruheenergie $E = m_e c^2$ des Elektrons entspricht. Für die potentielle Energie U einer homogen geladenen Kugeloberfläche gilt

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{e^2}{r} \stackrel{!}{=} m_e c^2$$

womit sich der klassische Elektronenradius ergibt als

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$$

Mit dem klassischen Elektronenradius ergibt sich der Streuquerschnitt eines Elektrons als

$$\sigma = \frac{8}{3}\pi r_e^2$$

b) Für die in eine Raumrichtung \hat{n} gilt mit der obigen Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} (\hat{n} \times \dot{\underline{v}})^2 \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \left(\frac{e}{m_e}\right)^2 (\hat{n} \times \underline{E}_0)^2 \\ &= \frac{e^4}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0 m_e^2} |\underline{E}_0|^2 \sin(\angle(\hat{n}, \underline{E}_0))^2 \end{aligned}$$

Für den Fall einer in der Streuebene polarisierten Welle ist nun, da $\vartheta := \angle(\hat{n}, \underline{k}_0) = \pi - \angle(\hat{n}, \underline{E}_0)$ die abgestrahlte Leistung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0 m_e^2} |\underline{E}_0|^2 \cos(\vartheta)^2$$

Ist die einfallende Welle senkrecht zur Streuebene polarisiert ist der Winkel zwischen der Polarisation der Welle und der Richtung \hat{n} stets $\pi/2$ und unabhängig von ϑ , so dass stets gilt

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0 m_e^2} |\underline{E}_0|^2$$

c) Für den Fall einer linear polarisierten Welle, deren Polarisation den Winkel φ zur Streuebene hat, gilt für das Kreuzprodukt

$$\dot{\underline{v}}^2 \propto (\hat{n} \times \underline{E}_0)^2 = (|\underline{E}_{||}| \sin(\vartheta) + |\underline{E}_{\perp}|)^2 = |E_0|^2 (\cos(\varphi) \cos(\vartheta) + \sin(\varphi))^2$$

Für eine nicht polarisierte Welle erhalten wir das Geschwindigkeitsquadrat durch Mittelung über den Winkel φ . Somit ist der Ausdruck für eine nichtpolarisierte Welle

$$\begin{aligned} \dot{\underline{v}}^2 &\propto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |E_0|^2 (\cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) + \sin(\varphi))^2 d\varphi \\ &= \frac{|E_0|^2}{2\pi} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)^2 \cos(\vartheta)^2 d\varphi}_{=\pi \cos(\vartheta)^2} + \underbrace{\int_0^{2\pi} 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \cos(\vartheta) d\varphi}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)^2 d\varphi}_{=\pi} \right) \\ &= \frac{|E_0|^2}{2\pi} [\pi + \pi \cos(\vartheta)^2] = |E_0|^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin(\vartheta)^2\right) \end{aligned}$$

Für die unter dem Winkel ϑ gestreute Leistung erhalten wir demnach durch

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{e^4}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0 m_e^2} |E_0|^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin(\vartheta)^2\right)$$

Hiermit kann der differentielle Streuquerschnitt bestimmt werden als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|S|} \frac{dP}{d\omega} = \frac{e^4}{16\pi^2 c^4 \varepsilon_0^2 m_e^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin(\vartheta)^2\right)$$

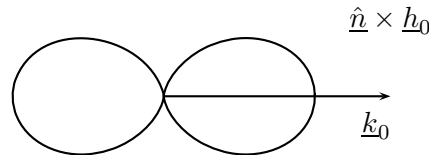
Die Integration über eine Kugeloberfläche Ω mit Kugelradius 1 liefert dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin(\vartheta) \\ &= \frac{e^4}{16\pi^2 c^4 \varepsilon_0^2 m_e^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \left(1 - \frac{1}{2} \sin(\vartheta)^2\right) \sin(\vartheta) \\ &= \frac{e^4}{8\pi c^4 \varepsilon_0^2 m_e^2} \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \left(1 - \frac{1}{2} \sin(\vartheta)^2\right) \sin(\vartheta)}_{=4/3} \\ &= \frac{1}{6\pi} \frac{e^4}{c^4 \varepsilon_0^2 m_e^2} \equiv \sigma \end{aligned}$$

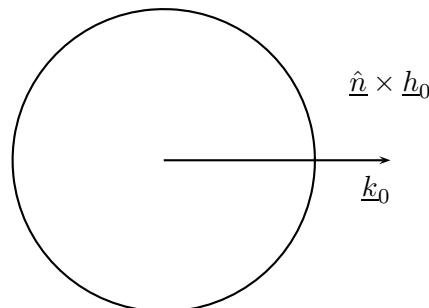
- d) Für den Fall einer in der Streuebene polarisierten Welle gilt für den differentiellen Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \cos(\vartheta)^2$$

So ergibt sich das Streudiagramm als



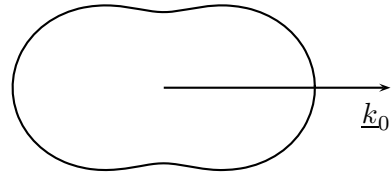
Im Falle einer Polarisation senkrecht zur Einfallsebene ist die Streuung unabhängig vom Winkel ϑ . So ergibt sich das Streudiagramm als



Im letzten Fall ist die Streuung rotationssymmetrisch um die k -Achse und es gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto 1 - \frac{1}{2} \sin^2(\vartheta)$$

Somit ergibt sich das Streudiagramm als



Übungsblatt 8 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 34: Zyklotron und Speicherring

a) In den Duranden wirkt die Lorentzkraft als Zentripetalkraft. Es gilt

$$q\underline{v} \times \underline{B} = -m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

Da für die Geschwindigkeit $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$ gilt ist so

$$\underline{v} \times q\underline{B} - \underline{v} \times m\underline{\omega} = 0$$

Mit der Voraussetzung von $\underline{v} \perp \underline{B}$ und $\underline{\omega} \parallel \underline{B}$ muss so

$$v(qB - m\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad qB = m\omega$$

Die Umlauffrequenz ω ist somit unabhängig von der Energie der Teilchen. Als beste Wahl für die Frequenz der Wechselspannung U ergibt sich

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{q}{2\pi m} B$$

da die Teilchen hier eine maximale Beschleunigung beim Durchgang durch den Spalt erfahren.

Die Energie ΔW , die ein Teilchen beim Durchlaufen des Spaltes gewinnt, ergibt sich aus der Spannung U und der Ladung q da

$$E = \frac{U}{d} \quad \Delta W = q E d \quad \Rightarrow \quad \Delta W = U q$$

wobei d den Abstand und E die Feldstärke zwischen den Duanden darstellt. In nicht-relativistischer Näherung entspricht die gewonnene Energie einer kinetischen Energie nach dem n -ten Durchgang durch den Spalt bei guter Frequenzwahl, somit gilt

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = U q n \quad \Rightarrow \quad v_n = \sqrt{\frac{2Uqn}{m}}$$

Der Bahnradius kann aus

$$\frac{v_n}{R_n} = \omega = \frac{qB}{m} \quad \Rightarrow \quad R_n = \frac{m}{qB} v_n = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2Uqn}{m}}$$

errechnet werden. Für die angegebenen Werte würde sich so nach dem vierten eine Geschwindigkeit und ein Bahnradius von

$$v_4 \approx 3.75 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \approx 1.25 \cdot c \quad R_4 \approx 1.06 mm$$

ergeben. Eine nicht-relativistische Rechnung führt zu einer Elektronengeschwindigkeit, die größer ist als die Lichtgeschwindigkeit. Die Näherung $v \ll c$ ist also Verletzt! Für schwerere Teilchen (Protonen) ergeben sich Geschwindigkeiten und Radien von

$$v_4 \approx 8.76 \cdot 10^6 \frac{m}{s} \quad R_4 \approx 4.57 cm$$

Hier ist $v/c = 0.03$ und somit eine nicht-relativistische Rechnung noch gerechtfertigt.

- b) Auch bei relativistischer Betrachtung gilt die Energieerhaltung. Die Energieerhaltung liefert so

$$\gamma m c^2 = m c^2 + q U n$$

womit die einerseits der Lorentzfaktor γ und andererseits die Geschwindigkeit des Teilchens errechnet werden kann.

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m c^2}{q U n + m c^2} \Rightarrow v = c \sqrt{1 - \frac{m c^2}{q U n + m c^2}}$$

Nach wie vor gilt nun

$$\frac{m(v_n) v_n^2}{R_n} = q v_n B$$

wobei m und v relativistisch zu verstehen sind. Die Umlauffrequenz ergibt sich so als

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v_n}{R_n} = \frac{q B}{m(v)} = \frac{q B}{m \gamma} = \frac{q B}{m} \frac{m c^2}{q U n + m c^2}$$

Die Umlauffrequenz ist also nicht mehr unabhängig von der Energie des Teilchens. Für den Bahnradius nach dem n -ten Durchgang gilt nun

$$R_n = \frac{v_n}{\omega} = \frac{c \sqrt{1 - \frac{m c^2}{q U n + m c^2}}}{\frac{q B}{m} \frac{m c^2}{q U n + m c^2}}$$

Eingesetzte Werte liefern für

$$R_4 \approx 3.23 \text{ cm}$$

Im nichtrelativistischen Fall ist die Umlauffrequenz $\omega = \frac{qB}{m}$ unabhängig vom Radius R der Bahn. Somit können geladene Teilchen mit einer Wechselspannung konstanter Frequenz an den Duanden beschleunigt werden, da immer beim Durchgang durch den Spalt ein Maximalwert der Spannung erreicht werden kann. Dies ist bei relativistischen Geschwindigkeiten nicht mehr gegeben, so dass der Spalt nicht mehr bei maximaler Spannung erreicht wird.

- c) Bei einer Beschleunigungsspannung von $U = U_0 \cos(\omega_{HF} t)$ mit $U_0 = 511 \text{ kV}$ wird bereits nach wenigen Durchgängen durch den Spalt eine relativistische Geschwindigkeit erreicht.
- d) Um schwere Teilchen bei konstanter Frequenz zu beschleunigen, kann das Magnetische Feld variiert werden. Für die Umlauffrequenz gilt nach b)

$$\omega = \frac{q}{m \gamma} B$$

Um diese Konstant zu halten kann das B -Feld variiert werden und zwar in der Art, dass

$$B = \gamma B_0$$

Man erhält eine Umlauffrequenz von

$$\omega = \frac{q}{m} B_0$$

Für das B -Feld muss hierbei gelten

$$B = \gamma B_0 = \frac{B_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{B_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2}}$$

An der Formel ist zu sehen, dass die Energie der beschleunigten Teilchen durch die maximale Feldstärke des B -Feldes begrenzt ist.

e) Nach der Energieerhaltung gilt

$$\gamma m_\mu c^2 = m_\mu c^2 + T$$

wobei T die kinetische Energie des Teilchens darstellt. Hiermit erhalten wir analog zu b) den Lorentzfaktor und die Geschwindigkeit.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_\mu c^2 + T}{m_\mu c^2} \quad v = c \sqrt{1 - \frac{m_\mu c^2}{m_\mu c^2 + T}}$$

Die vom Teilchen zurückgelegte Strecke ergibt sich nun als

$$s = v t = v \gamma \tau = c \tau \frac{m_\mu c^2 + T}{m_\mu c^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu c^2}{m_\mu c^2 + T}}$$

Die Anzahl der Umläufe ergibt sich nun als

$$n = \frac{s}{2\pi r} = \frac{c \tau}{2\pi r} \frac{m_\mu c^2 + T}{m_\mu c^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu c^2}{m_\mu c^2 + T}}$$

Eingesetzte Werte liefern so

$$n = \frac{2 \cdot 10^{-6} s \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 m} \frac{2.000105 TeV}{0.000105 TeV} \sqrt{1 - \frac{0.000105}{2.000105}} \approx 909.5$$

Wobei für die zurückgelegte Strecke gilt

$$s \approx 2856.9 km$$

Übungsblatt 8 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 36: Thomas-Präzession

a) Eine spezielle Lorentztransformation mit $\underline{v} \parallel \hat{z}$ wird durch die Transformationsmatrix

$$L(v) = \begin{pmatrix} \gamma_v & 0 & \beta_v \gamma_v \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta_v \gamma_v & 0 & \gamma_v \end{pmatrix}$$

wobei die y -Komponenten nicht berücksichtigt werden, also gilt:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_1 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v & 0 & \beta_u \gamma_u \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta_v \gamma_v & 0 & \gamma_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Für die Transformation einer Geschwindigkeit $\underline{u} \parallel \hat{x} \parallel \hat{x}'$

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x''_1 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_u & \beta_u \gamma_u & 0 \\ \beta_u \gamma_u & \gamma_u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L(u)} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x'_1 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Eine Transformation T von KS' nach KS ist also durch

$$T = L(u) \cdot L(v)$$

gegeben. So ist

$$T = \begin{pmatrix} \gamma_u \gamma_v & \beta_u \gamma_u & \beta_v \gamma_u \gamma_v \\ \beta_u \gamma_u \gamma_v & \gamma_u & \beta_u \beta_v \gamma_u \gamma_v \\ \beta_v \gamma_v & 0 & \gamma_v \end{pmatrix}$$

Mit der Angabe von

$$T = L(\alpha) \cdot L(\underline{w})$$

mit der Rotationsmatrix

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Ergibt sich aus

$$T_1^{-1} = L(\underline{w})_1^{-1}$$

ergibt sich so

$$\gamma_w = \gamma_u \gamma_v \quad \Rightarrow \quad 1 - \beta_w^2 = (1 - \beta_u^2)(1 - \beta_v^2)$$

b) Dabei ist die Reihenfolge der Transformationen nicht umkehrbar, da

$$L(u) \cdot L(v) = \begin{pmatrix} \gamma_u \gamma_v & \beta_u \gamma_u & \beta_v \gamma_u \gamma_v \\ \beta_u \gamma_u \gamma_v & \gamma_u & \beta_u \beta_v \gamma_u \gamma_v \\ \beta_v \gamma_v & 0 & \gamma_v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \gamma_u \gamma_v & \beta_u \gamma_u \gamma_v & \beta_v \gamma_v \\ \beta_u \gamma_u & \gamma_u & 0 \\ \gamma_u \beta_v \gamma_v & \beta_u \gamma_u \beta_v \gamma_v & \gamma_v \end{pmatrix} = L(v) \cdot L(u)$$

Eine Verkettung von Lorentztransformationen verhalten sich demnach wie eine Verkettung von Rotationen um unterschiedliche Achsen. Diese sind i.A. nicht kommutativ.

- c) Eine Multiplikation mit einer Rotationsmatrix im Raum ändert die erste Zeile einer Transformation nicht. Wie schon in Teil a) gilt so

$$T_{1,2} = L(\underline{w})_{1,2} \quad T_{1,3} = L(\underline{w})_{1,3}$$

hieraus können zwei bzw drei Gleichungen für die Komponenten von \underline{w} aufgestellt werden. Es ist

$$\gamma_u \gamma_v = \gamma_w \quad \beta_v \gamma_u \gamma_v = \beta_w^z \gamma_w \quad \beta_u \gamma_u = \beta_w^x \gamma_w$$

Aus der erste und zweiten Gleichung folgt

$$w^z = c\beta_w^z = c\beta_v^x = v$$

und aus Erster und Dritter

$$w^x = c\beta_w^x = \frac{\gamma_u}{\gamma_w} c\beta_u = \frac{u}{\gamma_w}$$

- d) Eine beliebige Lorentztransformation kann durch eine Drehung mit anschließender spezieller Transformation sowie Rückdrehung dargestellt werden. Für

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad L_w = \begin{pmatrix} \gamma_w & 0 & \beta_w \gamma_w \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta_w \gamma_w & 0 & \gamma_w \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$L(\underline{w}) = R^{-1} \cdot L_w \cdot R$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} L &= R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_w & -\sin(\alpha) \beta_w \gamma_w & \cos(\alpha) \beta_w \gamma_w \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \beta_w \gamma_w & -\sin(\alpha) \gamma_w & \cos(\alpha) \gamma_w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_w & -\sin(\alpha) \beta_w \gamma_w & \cos(\alpha) \beta_w \gamma_w \\ -\sin(\alpha) \beta_w \gamma_w & (\cos(\alpha))^2 + \gamma_w - (\cos(\alpha))^2 \gamma_w & -\cos(\alpha) \sin(\alpha) (\gamma_w - 1) \\ \cos(\alpha) \beta_w \gamma_w & -\cos(\alpha) \sin(\alpha) (\gamma_w - 1) & (\cos(\alpha))^2 \gamma_w - (\cos(\alpha))^2 + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da nun

$$\sin(\alpha) = -\frac{w_x}{w} \quad \cos(\alpha) = \frac{w_z}{w}$$

folgt dann

$$L = \begin{pmatrix} \gamma_w & \frac{w_x \gamma_w}{c} & \frac{w_z \gamma_w}{c} \\ \frac{w_x \gamma_w}{c} & \frac{w_z^2}{w^2} + \gamma_w - \frac{w_z^2 \gamma_w}{w^2} & \frac{w_z w_x (\gamma_w - 1)}{w^2} \\ \frac{w_z \gamma_w}{c} & \frac{w_z w_x (\gamma_w - 1)}{w^2} & \frac{w_z^2 \gamma_w}{w^2} - \frac{w_z^2}{w^2} + 1 \end{pmatrix}$$

und damit die Behauptung.

e) Betrachtet man nun die erste Spalte der Matrizen,

$$L(u) \cdot L(v) = R(\alpha) \cdot L(\underline{w})$$

so findet man, wenn Gleichheit gelten muss:

$$\frac{w_x \gamma_w}{c} = \cos(\alpha) \beta_u \gamma_u \gamma_v + \sin(\alpha) \beta_v \gamma_v \quad \frac{w_z \gamma_w}{c} = -\sin(\alpha) \beta_u \gamma_u \gamma_v + \cos(\alpha) \beta_v \gamma_v$$

Durch umformen der einen Gleichung nach $\cos(\alpha)$ und einsetzen in die andere folgt so

$$\frac{w_z \gamma_w}{c} = -\sin(\alpha) \beta_u \gamma_u \gamma_v - \frac{(-w_x \gamma_w + \sin(\alpha) \beta_v \gamma_v c) \beta_v}{\beta_u \gamma_u c}$$

und umgeformt nach $\sin(\alpha)$

$$\sin(\alpha) = \frac{\gamma_w (-w_z \beta_u \gamma_u + \beta_v w_x)}{\gamma_v c (\beta_u^2 \gamma_u^2 + \beta_v^2)}$$

Unter Benutzung der Gleichungen aus den ersten Teilen ergibt sich so

$$\alpha = \arcsin \left(-\frac{\gamma_u v u (\gamma_u \gamma_v - 1)}{\gamma_v (u^2 \gamma_u^2 + v^2)} \right)$$

Für kleine u kann Taylerentwickelt werden. Dabei ist

$$\alpha(u) \approx \alpha(0) + \partial_u \alpha(0) u + \dots$$

Leicht zu zeigen ist, dass

$$\alpha(0) = 0$$

Für die Ableitung nach u gilt nun nach eingesetztem Lorentzfaktor γ_u

$$\begin{aligned} \partial_u \alpha(u) &= -\frac{\gamma_u^3 v u^2 (\gamma_u \gamma_v + 1)}{\gamma_v (u^2 \gamma_u^2 + v^2) c^2} + \frac{\gamma_u v (\gamma_u \gamma_v - 1)}{\gamma_v (u^2 \gamma_u^2 + v^2)} \\ &\quad - \frac{\gamma_u^4 v u^2}{c^2 (u^2 \gamma_u^2 + v^2)} + \frac{\gamma_u v u (\gamma_u \gamma_v - 1) \left(2 u \gamma_u^2 + 2 \frac{u^3 \gamma_u^4}{c^2} \right)}{\gamma_v (u^2 \gamma_u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

und ausgewertet an der Stelle $u = 0$

$$\partial_u \alpha(0) = \frac{\gamma_v - 1}{v \gamma_v}$$

Somit gilt für den Winkel α in linearer Näherung

$$\alpha \approx \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{u}{v}$$

was zu zeigen war.

Übungsblatt 9 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 38: Gekoppelte Pendel

a) Das Modell der gekoppelten Pendel wird durch die Dichtefunktionen

$$L = \sum_{i=1}^2 (T_i - (U_i + U_{12}))$$

modelliert. Die Dynamik des Systems ist nun durch das Extremum des Integrals der Dichtefunktion gegeben. Nach den Euler-Gleichungen muss so

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Es gilt für die partiellen Ableitungen nach q

$$\partial_{q_1} L = -gm_1 l_1 q_1 - \alpha(q_1 - q_2)$$

sowie

$$\partial_{q_2} L = -gm_2 l_2 q_2 - \alpha(q_1 - q_2)$$

und für den zweiten Term der Euler-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L = \frac{d}{dt} m_i l_i^2 \dot{q}_i = m_i l_i^2 \ddot{q}_i$$

Aus der Eulergleichung erhält man nun das System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} m_1 l_1^2 \ddot{q}_1 + gm_1 l_1 q_1 + \alpha(q_1 - q_2) \\ m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 + gm_2 l_2 q_2 - \alpha(q_1 - q_2) \end{pmatrix} = 0$$

Der auf dem Blatt angegebene Ansatz liefert dann ohne Ausschreiben der Exponentialfunktion

$$\begin{pmatrix} (-m_1 l_1^2 \lambda^2 + gm_1 l_1 + \alpha) A_1 - \alpha A_2 \\ (-m_2 l_2^2 \lambda^2 + gm_2 l_2 + \alpha) A_2 - \alpha A_1 \end{pmatrix} = 0$$

Oder umgeformt als Matrix-Vektorprodukt und gekürzt

$$\begin{pmatrix} -\lambda^2 + \frac{g}{l_1} + \frac{\alpha}{m_1 l_1^2} & -\frac{\alpha}{m_1 l_1^2} \\ -\frac{\alpha}{m_2 l_2^2} & -\lambda^2 + \frac{g}{l_2} + \frac{\alpha}{m_2 l_2^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

Mit den Abkürzungen

$$\omega_i^2 = \frac{g}{l_i} \quad \alpha_i = \frac{\alpha}{m_i l_i^2}$$

folgt das zu zeigende Gleichungssystem. Durch die Forderung der Lösbarkeit des Gleichungssystems muss die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden. Es müsste gelten

$$(-\lambda^2 + \omega_1^2 + \alpha_1)(-\lambda^2 + \omega_2^2 + \alpha_2) - \alpha_1 \alpha_2 = 0 \quad (1)$$

Aus dieser Gleichung können zwei Werte für λ^2 bestimmt werden. Die Allgemeine Lösung der für \underline{q} ist also durch die Linearkombination gegeben der einzelnen Lösungen gegeben.

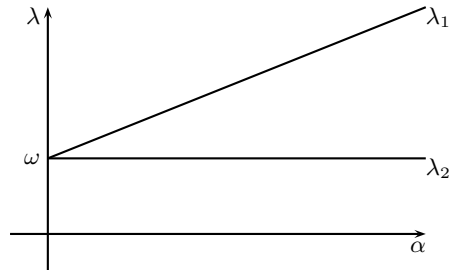
b) Für den Fall gleicher Pendel vereinfacht sich Gleichung 1 zu

$$-\lambda^2 + \omega^2 + \alpha_{12} = \pm\alpha_{12}$$

oder beide Lösungen

$$\lambda_1^2 = \omega^2 + 2\alpha \quad \lambda_2^2 = \omega$$

Graphisch sind



Einsetzen der beiden Eigenschwingungswerte liefert für die Schwingungsformen im ersten Fall eine gegenphasige Schwingung, sowie im zweiten Fall eine gleichphasige Schwingung.

Übungsblatt 9 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 39: Kürzester Weg

- a) Gesucht ist eine Kurve, so dass die Kurvenlänge zweier Punkte auf der Ebene minimiert wird. Die Länge einer Kurve ergibt sich als

$$l = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Die Umparametrisierung nach der Zeit und danach nach x liefert dann

$$l = \int dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \int dx \sqrt{1 + y'(x)^2} =: \int L(y')$$

Minimiert wird die Länge wenn gilt

$$0 = \partial_y L - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{y}} L = 0 - \frac{d}{dt} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Äquivalent ist die Aussage

$$c = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Leftrightarrow y' = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$$

Die Ableitung der y -Koordinate nach der x -Koordinate ist konstant, somit ist der kürzeste Weg gerade.

- b) Auch für die Kurvenlänge auf einem Zylinder kann analog vorgegangen werden. In Zylinderkoordinaten ist

$$l = \int ds = \int \sqrt{r^2 d\phi^2 + dz^2} = \int d\phi \sqrt{r^2 + z'(\phi)^2} =: \int L(z')$$

Analog zu oben wird die Länge minimiert, wenn gilt

$$0 = \partial_y L - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{y}} L = 0 - \frac{d}{dt} \frac{z'}{r^2 + z'^2}$$

Auch hier ist die Gleichung äquivalent zu

$$c = \frac{z'}{r^2 + z'^2} \Leftrightarrow z'(\phi) = \frac{r c}{\sqrt{1 - c^2}}$$

Integration liefert daraus

$$z = \frac{r c}{\sqrt{1 - c^2}} \phi + z_0$$

Bei der Kurve handelt es sich um eine Gerade auf der abgerollten Zylinderoberfläche. Je nach Anordnung der Anfangs- und Endpunkte ist die Kurve im Raum durch einen Teil einer Ellipse gegeben.

- c) Auf der Kegeloberfläche ist das Wegelement ds und damit die Weglänge l gegeben durch

$$l = \int ds = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2}$$

Mit den Ersetzungen $dr = \tan \alpha dz$ und $r = \tan \alpha z$ ergibt sich daraus

$$l = \int \sqrt{(\tan^2 \alpha + 1) dz^2 + z^2 \tan^2 \alpha d\phi^2} = \int dz \sqrt{(\tan^2 \alpha + 1) + z^2 \tan^2 \alpha \phi'^2} =: \int L(\phi, z)$$

Wie auch oben ist wenn die Länge Extremal wird

$$0 = \partial_y L - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{y}} L = 0 - \frac{d}{dt} \frac{z^2 \tan^2 \alpha \phi'}{\sqrt{(\tan^2 \alpha + 1) z^2 \tan^2 \alpha \phi'^2}}$$

Oder als äquivalente Aussage

$$c = \frac{z^2 \tan^2 \alpha \phi'}{\sqrt{(\tan^2 \alpha + 1) z^2 \tan^2 \alpha \phi'^2}}$$

Und weiter geht's nicht!

Übungsblatt 10 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 42: Rotierendes Schwerependel

a) Für ein Längenelement ds in Kugelkoordinaten gilt

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2$$

Eine Geschwindigkeit ergibt sich also als

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2$$

Die kinetische Energie des Beschriebenen Systems ergibt sich so als

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 \right)$$

Für die potentielle Energie gilt

$$U = mgh = -mgl \cos(\vartheta)$$

Die Lagrangefunktion lautet also

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 \right) + mgr \cos(\vartheta)$$

Durch die Zwangsbedingungen wird das System weiter eingeschränkt

$$r = l \Rightarrow \dot{r} = 0 \quad \varphi = \omega t \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega$$

und so folgt die Lagrangedichte

$$L = \frac{1}{2} m \left(l^2 \dot{\vartheta}^2 + l^2 \omega^2 \sin^2(\vartheta) \right) + mgl \cos(\vartheta)$$

b) Als weitere Einschränkung für das Auftreten einer Gleichgewichtslage kann

$$\dot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = 0$$

als weitere Zwangsbedingung eingeführt werden. Die Eulergleichung liefert so

$$0 = \frac{\partial}{\partial \varphi} L = ml^2 \omega^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) - mgl \sin(\vartheta)$$

Durch Ausschluss der zwei Lösungen $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_2 = \pi$ kann die dritte Lösung für eine Gleichgewichtslage ermittelt werden. Es ist

$$\vartheta_3 = \arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$$

Die Gleichgewichtslagen mit $\vartheta = \vartheta_{1,2}$ sind die trivial möglichen Gleichgewichtslagen, bei denen das Pendel entlang der Rotationsachse ausgerichtet ist. Der durch den Ausdruck für den Winkel ϑ_3 hergeleitete Ausdruck sollte für kleine Winkelgeschwindigkeiten gegen den Winkel π streben. Da die Arcuscosinusfunktion nur im Intervall $[-1; 1]$ definiert ist, ist keine Aussage möglich. Für große Winkelgeschwindigkeiten nähert sich wie erwartet den Winkel $\pi/2$ an.

c) Für das zweite Differential der Eulergleichung gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L = \frac{d}{dt} ml^2 \dot{\vartheta} = ml^2 \ddot{\vartheta}$$

Die Eulergleichung liefert so als Bewegungsgleichung

$$ml^2 \ddot{\vartheta} - ml^2 \omega^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) + mgl \sin(\vartheta) = 0$$

Für kleine Kreisfrequenzen ω ergibt sich so eine harmonische Schwingung um die Ruhelage. Für große ω führt das Pendel auch eine Schwingung um die Ruhelage aus. Hierbei wird die Frequenz der Schwingung von der Kreisfrequenz der Rotation bestimmt.

Übungsblatt 10 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 43: Verspätete Adventskette

a) Die kinetische Energie, der aufgereihten Teilchen ist durch die üblichen Formel

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\underline{q}})^2$$

gegeben. mit der Definition des x -Vektors nach den Blatt folgt einfach

$$\dot{x}_i = \frac{d}{dt}(q_i - q_i^{(0)}) = \dot{q}_i - 0$$

und so die die kinetische Energie als

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\underline{x}})^2 = \frac{m}{2} \dot{\underline{x}}^T \dot{\underline{x}}$$

Die potentielle Energie des Systems ergibt sich als Summe der potentiellen Energien zweier benachbarter Massen.

$$U = \sum_{i=1}^N u(q_{i+1} - q_i)$$

Der Ausdruck im Argument der potentiellen Energie lässt sich mit $a = q_{i+1}^{(0)} - q_i^{(0)}$ und der Definition des Vektors x anders Formulieren

$$q_{i+1} - q_i = q_{i+1} - q_i + a - q_{i+1}^{(0)} + q_i^{(0)} = a + (x_{i+1} - x_i)$$

Für kleine unterschiede $(x_{i+1} - x_i)$ kann nun der Ausdruck der kinetischen Energie entwickelt werden

$$u(a + (x_{i+1} - x_i)) \approx \underbrace{u(a)}_{u_0} + \underbrace{u'(a)}_{=0} + \frac{u''(a)}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 + \dots$$

Da die potentielle Energie für den Abstand a gerade ein Minimum aufweist, verschwindet der zweite Term der Entwicklung. Die additive Energie u_0 wird im Folgenden vernachlässigt. Die gesamte potentielle Energie ist so mit der Definition $D := u''(a)$

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{D}{2} (x_{i+1} - x_i)^2$$

Desweiteren betrachten wir den Ausdruck, der sich mit den Vektorkomponenten $k_i = x_{i+1} - x_i$ vereinfacht zu

$$\sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i)^2 = \sum_{i=1}^N k_i^2 = \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{k}$$

Der Vektor k lässt sich als Matrix-Vektorprodukt einer Matrix D mit dem Vektor x errechnen

$$k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x$$

Nun gilt weiter

$$k^T \cdot k = (D \cdot x)^T \cdot D \cdot x = x^T \cdot \underbrace{D^T \cdot D}_{:=B} \cdot x$$

Das Matrixprodukt ausgeführt führt dies auf eine Matrix B mit 2 auf der Hauptdiagonalen, sowie -1 auf der Nebendiagonalen.

$$B = D^T \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -1 & & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$

Das System der auf dem Kreis bewegten Massepunkte wird demnach durch die Lagrangedichte L modelliert

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{x}^T \cdot \dot{x} - \frac{D}{2} x^T \cdot B \cdot x$$

b) Mit der Lagragedichte L gilt nun

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L = \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{x}^T \cdot I \cdot \dot{x}) = \frac{m}{2} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \dot{x}^T \right)}_{=I} \cdot I \cdot \dot{x} + \left(\dot{x}^T \cdot I \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right)}_{=1} \right)^T \right) = m \dot{x}$$

wobei I die Einheitsmatrix darstellt. Analog hierzu gelangt man mit der Symmetrischen Eigenschaft von der Matrix B

$$-\frac{\partial}{\partial x} L = \frac{D}{2} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \dot{x}^T \right)}_{=I} \cdot B \cdot \dot{x} + \left(\dot{x}^T \cdot B \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \dot{x} \right)}_{=1} \right)^T \right) = \frac{D}{2} (Bx + (x^T B)^T) = DBx$$

Nach der Euler-Gleichung gilt nun

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L - \frac{\partial}{\partial x} L = 0 = \frac{d}{dt} m \dot{x} + B \cdot x = m \ddot{x} + DB \cdot x$$

oder Komponentenweise

$$m \ddot{x}_i + x(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}) = 0 \quad 1 \leq i \leq N$$

c) Setzt man

$$k_n = \frac{2\pi}{N}n$$

so durchläuft k_n den vollen Kreisbereich, also alle möglichen Raumfrequenzen. Dabei durchläuft n den Bereich zwischen 0 und $N - 1$. Die N -te Raumfrequenz entspricht hier der nullten.

Die Fourierkomponenten \tilde{x}_n sind hier durch

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-ik_n j a}$$

gegeben. Einsetzen liefert hier

$$\begin{aligned} x_m &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_n e^{ik_n m a} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-ik_n j a} e^{ik_n m a} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i\frac{2\pi}{N}n(m-j)a} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}(m-j)a} \right)^n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1 - e^{-i2\pi(m-j)a}}{1 - e^{-i\frac{2\pi}{N}(m-j)a}}}_{=N\delta_{jm}} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} x_j \delta_{jm} = x_m \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich der Vektor \tilde{x} als Fouriertransformierte des Vektors x

Übungsblatt 11 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 45: Swing-by Verfahren

- a) Betrachtet man die Raumsonde mit dem Ortsvektor $\underline{r}(t)$ im System Raumsonde-Jupiter, so ergibt sich für die kinetische Energie der Raumsonde

$$T = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2$$

Die potentielle Energie der Raumsonde wird durch das Gravitationspotential des Jupiters bestimmt. Wird die Position des Jupiters durch $\underline{R}(t)$ dargestellt, so ergibt sich

$$U = -G \frac{mM}{|\underline{r} - \underline{R}(t)|}$$

Hierbei ist G die Gravitationskonstante, sowie m die Masse der Raumsonde und M die Masse des Jupiters. Die Lagrangedichte ergibt sich nun als

$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = T - U = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 + G \frac{mM}{|\underline{r} - \underline{R}(t)|}$$

Die Bahn des Jupiters lässt sich hier nach den Angaben als lineare Bewegung auffassen

$$\underline{R}(t) = \underline{R}_0 + \underline{v}t$$

- b) Die Gesamtenergie der Raumsonde lässt sich hier aus kinetischer und potentieller Energie ausdrücken. Es ist

$$E = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 - G \frac{mM}{|\underline{r} - \underline{R}(t)|}$$

Die Energie ist in diesem Fall keine Erhaltungsgröße, da es sich hierbei um ein bewegtes Potential handelt, also

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \frac{\partial}{\partial t} U \neq 0$$

Eine Koordinatentransformation mit

$$\underline{r} = \underline{\rho} + \underline{R}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{r}} = \dot{\underline{\rho}} + \underline{v}$$

liefert, in die Lagrangefunktion eingesetzt

$$\tilde{L}(\underline{\rho}, \dot{\underline{\rho}}, t) = \frac{m}{2} (\dot{\underline{\rho}} + \underline{v})^2 + G \frac{mM}{|\underline{\rho}|}$$

Da nun

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{L} = 0$$

also das System zeitlich invariant ist, ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße

$$H = \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{\rho}}} \tilde{L} \cdot \dot{\underline{\rho}} - \tilde{L} = m \dot{\underline{\rho}}^2 + m \dot{\underline{\rho}} \cdot \underline{v} - \tilde{L} = \frac{m}{2} (\dot{\underline{\rho}}^2 - \underline{v}^2) - G \frac{mM}{|\underline{\rho}|}$$

Die Gesamtenergie der Raumsonde E lässt sich nun aus der konstanten Hamiltonfunktion und einer Konstante $k = m(\dot{\underline{\rho}} + \underline{v}) \cdot \underline{v}$ berechnen. Es ist

$$H + k = \frac{m}{2} (\dot{\underline{\rho}}^2 - \underline{v}^2) - G \frac{mM}{|\underline{\rho}|} + m(\dot{\underline{\rho}} + \underline{v}) \cdot \underline{v} = \frac{m}{2} (\dot{\underline{\rho}} + \underline{v})^2 - G \frac{mM}{|\underline{\rho}|} = T + U = E$$

- c) Betrachtet man nun die Raumsonde zu zwei Zeitpunkten t_0 und t_1 , an denen sich die Raumsonde im gleichen Abstand zum Jupiter befindet, jedoch weit von Jupiter entfernt ist, also $|\rho_0| = |\rho_1|$, so ergibt sich aus der Erhaltungsgröße $H_0 = H_1$

$$\frac{m}{2}(\dot{\underline{\rho}}_0^2 - \underline{v}^2) - G\frac{mM}{|\underline{\rho}_0|} = \frac{m}{2}(\dot{\underline{\rho}}_1^2 - \underline{v}^2) - G\frac{mM}{|\underline{\rho}_1|}$$

Hier kann nun der Beitrag des Potentials eliminiert werden. Weiter gekürzt folgt die Erhaltung der Größe $\dot{\rho}^2$

$$\dot{\underline{\rho}}_0^2 = \dot{\underline{\rho}}_1^2$$

und mit der Definition von ρ der Ausdruck

$$(\dot{\underline{r}}_0 - \underline{v})^2 = (\dot{\underline{r}}_1 - \underline{v})^2$$

oder

$$\dot{\underline{r}}_0^2 - 2\dot{\underline{r}}_0 \cdot \underline{v} = \dot{\underline{r}}_1^2 - 2\dot{\underline{r}}_1 \cdot \underline{v}$$

Sei nun α der Winkel zwischen Flugbahn der Sonde und des Planeten, so folgt mit der Definition des Skalarprodukts für die skalaren Größen der Vektoren.

$$\dot{r}_0^2 - 2\dot{r}_0 v \cos(\alpha_0) = \dot{r}_1^2 - 2\dot{r}_1 v \cos(\alpha_1) \Rightarrow \dot{r}_1 = \cos(\alpha_1)v \pm \sqrt{\cos^2(\alpha_1)v^2 + \dot{r}_0^2 - 2\dot{r}_0 v \cos(\alpha_0)}$$

Schon an der Formel ist zu sehen, dass bei einem Vorbeiflug eine Raumsonde entweder gebremst oder beschleunigt werden kann. Mit den angegebenen Werten und $\alpha_1 = 0$ bzw. $\alpha_0 = 50^\circ$ ergeben sich so die möglichen Geschwindigkeiten

$$\dot{r}_1^{(1)} = 23.9 \frac{km}{s} \quad \dot{r}_1^{(2)} = 3.09 \frac{km}{s}$$

Dabei entspricht $\dot{r}_1^{(1)}$ der Geschwindigkeit nach dem Passieren der Jupiterbahn mit einer Flugbahn „hinter“ dem Jupiter und $\dot{r}_1^{(2)}$ mit einer einer Flugbahn „vor“ dem Jupiter.

Bei einem Vorbeiflug hinter dem Jupiter wird so die Fluchtgeschwindigkeit erreicht. Der Faktor Δ der kinetischen Energien ergibt sich hier als

$$\Delta = \frac{E_1^{kin}}{E_0^{kin}} = \frac{\dot{r}_1^2}{\dot{r}_0^2} \approx 5.95$$

Durch die Veränderung des Anflugwinkels könnte der Geschwindigkeitsgewinn weiter erhöht werden. Für $\alpha_0 = 90^\circ$ ergibt sich die resultierende Geschwindigkeit dann als $\dot{r}_1 = 36.8 \frac{km}{s}$.

Übungsblatt 11 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 47: Teilchen in elektromagnetischen Feldern

- a) Ein elektrisches Feld mit $\underline{E} = E\underline{e}_y$ und ein magnetische Feld $\underline{B} = B\underline{e}_z$, werden durch das Potential $\phi = -Ey$ bzw. ein Vektorpotential $\underline{A} = -By\underline{e}_x$ erzeugt. Hierbei bezeichnet \underline{e}_i den Einheitsvektor in Richtung i . Es ist

$$\underline{E} = -\nabla\phi = -(-E)\underline{e}_y$$

sowie das B -Feld

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} = B\nabla \times (-y\underline{e}_x) = B\underline{e}_z$$

Die Lagrangedichte für ein Teilchen mit der Ladung q und der Masse m ergibt sich hier als

$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + qE(\underline{r} \cdot \underline{e}_y) - qB(\underline{r} \cdot \underline{e}_y)(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_x)$$

wobei hier die Vekordarstellung der Lagrangefunktion gewählt wurde.

- b) Zur Herleitung der Bewegungsgleichung sind die Ableitungen zu betrachten. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial \underline{r}} L = qE\underline{e}_y - qB\underline{e}_y(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_x)$$

sowie die Ableitungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{r}}} L = \frac{d}{dt} m\dot{\underline{r}} - qB\underline{e}_x(\underline{r} \cdot \underline{e}_y) = m\ddot{\underline{r}} - qB\underline{e}_x(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_y)$$

Nach der Euler-Gleichung wird die Bewegung nun durch die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \underline{r}} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\underline{r}}} L$$

und somit durch

$$qE\underline{e}_y - qB\underline{e}_y(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_x) = m\ddot{\underline{r}} - qB\underline{e}_x(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_y)$$

bestimmt. Etwas umgeformt erhält man nun

$$\begin{aligned} m\ddot{\underline{r}} &= qE\underline{e}_y + qB\underline{e}_x(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_y) - qB\underline{e}_y(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_x) \\ &= q(\underbrace{E\underline{e}_y + B(\underline{e}_x(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_y) - \underline{e}_y(\dot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_x))}_{=\underline{E}}) \\ &= q(\underline{E} + B\dot{\underline{r}} \times \underbrace{(\underline{e}_x \times \underline{e}_y)}_{\underline{e}_z}) \\ &= q(\underline{E} + \dot{\underline{r}} \times \underbrace{B\underline{e}_z}_{\underline{B}}) = q(\underline{E} + \dot{\underline{r}} \times \underline{B}) \end{aligned}$$

die newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feldern.

c) Die Lagrangedichte ist in diesem Fall nicht zeitabhängig, soll bedeuten

$$\frac{\partial}{\partial t} L = 0$$

Hieraus folgt die Energieerhaltung des Systems.

Als eine zyklische Variable des Systems ergibt sich die z -Variable. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial r_z} L = 0$$

Es folgt die Impulserhaltung für den Impuls entlang der z -Achse

$$p_z = m\dot{r}_z = \text{const.}$$

Ach für die x -Komponente der Teilchenbahn gilt

$$\frac{\partial}{\partial r_x} L = 0$$

Hieraus folgt die Impulserhaltung des kononischen Impulses für die x -Achse. Es ist

$$p_x = \frac{\partial}{\partial \dot{r}_x} L = m\dot{r}_x - qBr_y = m\dot{r}_x + qA_x = \text{const.}$$

d) Betrachtet man als weitere Symmetrie die Verschiebung des Koordinatensystems in eine Beliebige Richtung, also

$$\bar{\underline{r}} = \underline{r} + \underline{a} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{\underline{r}}} = \dot{\underline{r}}$$

mit $\underline{a} = \text{const.}$, so gilt für die Langrangedichte

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\bar{\underline{r}}, \dot{\bar{\underline{r}}}) &= \frac{m}{2} \dot{\bar{\underline{r}}}^2 + qE((\bar{\underline{r}} - \underline{a}) \cdot \underline{e}_y) - qB((\bar{\underline{r}} - \underline{a}) \cdot \underline{e}_y)(\dot{\bar{\underline{r}}} \cdot \underline{e}_x) \\ &= \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\bar{\underline{r}}}^2 + qE(\bar{\underline{r}} \cdot \underline{e}_y) - qB(\bar{\underline{r}} \cdot \underline{e}_y)(\dot{\bar{\underline{r}}} \cdot \underline{e}_x)}_{=L(\bar{\underline{r}}, \dot{\bar{\underline{r}}})} - qE(\underline{a} \cdot \underline{e}_y) + qB(\underline{a} \cdot \underline{e}_y)(\dot{\bar{\underline{r}}} \cdot \underline{e}_x) \end{aligned}$$

Mit einer Eichungsfunktion

$$F(\bar{\underline{r}}, \underline{a}, t) := -qE(\underline{a} \cdot \underline{e}_y)t + qB(\underline{a} \cdot \underline{e}_y)(\bar{\underline{r}} \times \underline{e}_x)$$

ist nun

$$\tilde{L}(\bar{\underline{r}}, \dot{\bar{\underline{r}}}) = L(\bar{\underline{r}}, \dot{\bar{\underline{r}}}) + \frac{d}{dt} F(\bar{\underline{r}}, \underline{a}, t)$$

Zu der Gefundenen Symmetrie erhält man nun nach dem Noether-Theorem eine Erhaltungsgröße durch

$$\begin{aligned} J(\bar{\underline{r}}, \dot{\bar{\underline{r}}}, t) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\bar{\underline{r}}}} L \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{a}} \bar{\underline{r}} - \frac{\partial}{\partial \underline{a}} F \\ &= (m\dot{\bar{\underline{r}}} - qB\underline{e}_x(\underline{r} \cdot \underline{e}_y)) \cdot 1 - qEt\underline{e}_y + qb\underline{e}_y(\bar{\underline{r}} \cdot \underline{e}_x) \\ &= m\dot{\bar{\underline{r}}} + qB\underline{r} \times \underbrace{(\underline{e}_y \times \underline{e}_x)}_{-\underline{v} \times \underline{B}} - q \underbrace{E\underline{e}_y}_E t \\ &= m\dot{\bar{\underline{r}}} - q(\bar{\underline{r}} \times \underline{B} + \underline{E}t) = \text{const.} \end{aligned}$$

Eine Ableitung nach der Zeit liefert nun die Newtonsche Bewegungsgleichung. Komponentenweise Betrachtung liefert für die x und die z -Komponente die Konstanz der kanonischen Impulse, die schon in b) gefunden wurden. Für die y -Komponente ist

$$J_y = m\dot{\bar{r}}_y + q\bar{r}_x B - qEt$$

eine Erhaltungsgröße

- e) Betrachtet man die Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse m und der Ladung q in den angegebenen Feldern, so ergeben sich für x und y -Komponente die gekoppelten Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}(t) = \frac{q}{m}B\dot{y}(t) \quad \ddot{y}(t) = \frac{q}{m}E - \frac{q}{m}B\dot{x}(t)$$

Mit der komplexwertigen Funktion $\zeta(t) := x(t) + iy(t)$ und den Abkürzungen $\epsilon = \frac{q}{m}E$, sowie $\beta := \frac{q}{m}B$ lassen sich die gekoppelten DGL als eine Differentialgleichung schreiben

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} &= \ddot{x} + i\ddot{y} = \beta\dot{y} + i\epsilon - i\beta\dot{x} \\ &= -i\beta\dot{x} + \beta\dot{y} + i\epsilon = -i\beta \underbrace{(\dot{x} + i\dot{y})}_{\dot{\zeta}} + i\epsilon = i(\epsilon - \beta\dot{\zeta}) \end{aligned}$$

Durch Trennung der Variablen lässt sich die DGL 2. Ordnung auf eine DGL erster Ordnung vereinfachen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\zeta}}{dt} &= i(\epsilon - \beta\dot{\zeta}) \\ \frac{1}{i} \int_{\dot{\zeta}_0}^{\dot{\zeta}} \frac{d\dot{\zeta}}{\epsilon - \beta\dot{\zeta}} &= \int_{t_0}^t = t \\ \ln(\epsilon - \beta\dot{\zeta}) &= i\beta t + \ln(\epsilon - \beta v_0) \\ \dot{\zeta} &= -\frac{\epsilon - \beta v_0}{\beta} e^{i\beta t} + \frac{\epsilon}{\beta} \end{aligned}$$

Wobei die Anfangsbedingungen $\dot{\zeta}_0 = v_0$ benutzt wurden. Ein weiteres Separieren der Variablen liefert dann die Funktion ζ , wobei wieder die Anfangsbedingungen $\zeta(0) = 0$ genutzt wurden

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= -\frac{\epsilon - \beta v_0}{\beta} e^{i\beta t} + \frac{\epsilon}{\beta} \\ \zeta &= -\frac{\epsilon - \beta v_0}{\beta^2} (i - ie^{i\beta t}) + \frac{\epsilon}{\beta} t \\ &= -\frac{\epsilon - \beta v_0}{\beta^2} (i - i\cos(\beta t) + \sin(\beta t)) + \frac{\epsilon}{\beta} t \\ &= -\frac{\epsilon - \beta v_0}{\beta^2} \sin(\beta t) + \frac{\epsilon}{\beta} t - i\frac{\epsilon - \beta v_0}{\beta^2} (1 - \cos(\beta t)) \\ &= \frac{\beta v_0 - \epsilon}{\beta^2} \sin(\beta t) + i\frac{\beta v_0 - \epsilon}{\beta^2} (\cos(\beta t) - 1) \end{aligned}$$

Da nun

$$x(t) = \Re(\zeta(t)) \quad y(t) = \Im(\zeta(t))$$

folgt für

$$x(t) = \frac{\beta v_0 - \epsilon}{\beta^2} \sin(\beta t) = \left(\frac{m}{qB} v_0 - \frac{mE}{qB^2} \right) \sin \left(\frac{q}{m} B t \right) + \frac{E}{B} t$$

und für y

$$y(t) = \frac{\beta v_0 - \epsilon}{\beta^2} (\cos(\beta t) - 1) = \left(\frac{m}{qB} v_0 - \frac{mE}{qB^2} \right) \left(\cos \left(\frac{q}{m} B t \right) - 1 \right)$$

Übungsblatt 12 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 49: Doppelpendel

- a) Betrachtet man die Anordnung des Doppelpendels in einem Koordinatensystem mit dem Ursprung im Aufhängepunkt der Pendel so ergibt sich die kinetische Energie des Systems als

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\underline{r}}_2^2$$

Für die Potentielle Energie des Systems gilt

$$U = -m_1 g (\underline{r}_1 \cdot \underline{e}_z) - m_2 g (\underline{r}_2 \cdot \underline{e}_z)$$

Der Verbindungsvektor der Massen \underline{r}_{12} ergibt sich als

$$\underline{r}_{12} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

Ein Übergang in Ebene Polarkoordinaten ergibt nun

$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \sin(\varphi_1) \\ \rho_1 \cos(\varphi_1) \end{pmatrix} \quad \underline{r}_{12} = \begin{pmatrix} \rho_2 \sin(\varphi_2) \\ \rho_2 \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

mit den Zwangsbedingungen $\rho_1 = l_1$ und $\rho_2 = l_2$ folgt nun für

$$\dot{\underline{r}}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) \\ -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) \end{pmatrix} \quad \dot{\underline{r}}_{12} = \begin{pmatrix} l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) \\ -l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

In den neuen Koordinaten sind nun die Energien gegeben als

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{\underline{r}}_{12} + \dot{\underline{r}}_1)^2 \\ &= \frac{m_1}{2} (l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \cos^2(\varphi_1) + l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin^2(\varphi_1)) + \frac{m_2}{2} (l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2))^2 \\ &\quad + \frac{m_2}{2} (l_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2))^2 \\ &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2))] \\ &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ U &= -m_1 g l_1 \cos(\varphi_1) - m_2 g [l_2 \cos(\varphi_2) + l_1 \cos(\varphi_1)] \end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ &\quad + m_1 g l_1 \cos(\varphi_1) + m_2 g [l_2 \cos(\varphi_2) + l_1 \cos(\varphi_1)] \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich nun aus den Euler-Lagrange-Gleichungen. Die Partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_1} L &= \frac{d}{dt} [m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \\
&= m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\
\frac{\partial}{\partial \varphi_1} L &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - m_1 g l_1 \sin(\varphi_1) - m_2 g l_1 \sin(\varphi_1) \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_2} L &= \frac{d}{dt} [m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \\
&= m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\
\frac{\partial}{\partial \varphi_2} L &= m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 g l_2 \sin(\varphi_2)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_1} L - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} L \\
&= m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_1 g l_1 \sin(\varphi_1) + m_2 g l_1 \sin(\varphi_1) \\
&= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 + l_1 g (m_1 + m_2) \sin(\varphi_1)
\end{aligned}$$

und für die zweite Komponente

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_2} L - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} L \\
&= m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\
&\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 g l_2 \sin(\varphi_2) \\
&= m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 g l_2 \sin(\varphi_2)
\end{aligned}$$

Durch die Abkürzungen

$$M := \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad Q := \frac{l_2}{l_1} \quad \omega_1^2 := \frac{g}{l_1} \quad \omega_2^2 := \frac{g}{l_2} \quad \Delta\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$$

Lassen sich die Bewegungsgleichungen vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_1 + LM(\ddot{\varphi}_2 \cos(\Delta\varphi) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\Delta\varphi)) + \omega_1^2 \sin(\varphi_1) &= 0 \\
\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{L}(\dot{\varphi}_1 \cos(\Delta\varphi) + \dot{\varphi}_1^2 \sin(\Delta\varphi)) + \omega_2^2 \sin(\varphi_2) &= 0
\end{aligned} \tag{1}$$

b) Die generalisierten Impulse ergeben sich hier als

$$p_1 = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_1} L = m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_1 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

sowie

$$p_2 = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_2} L = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Die Hamiltonfunktion ist nun gegeben als

$$\begin{aligned}
 H &= p_1\dot{\varphi}_1 + p_2\dot{\varphi}_2 - L = m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_1 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 &\quad + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \\
 &\quad + \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \\
 &\quad + m_1 g l_1 \cos(\varphi_1) + m_2 g [l_2 \cos(\varphi_2) + l_1 \cos(\varphi_1)] \\
 &= \frac{1}{2} [m_1 + m_2] l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_1 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 &\quad - [m_1 + m_2] g l_1 \cos(\varphi_1) - m_2 g l_2 \cos(\varphi_2)
 \end{aligned}$$

oder dargestellt mit den Impulsen

$$H = \frac{l_1^2(m_1 + m_2)p_1^2 + l_2^2 m_2 p_2^2 - 2m_2 l_1 l_2 p_1 p_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2l_1^2 l_2^2 m_2 [m_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) m_2]} - [m_1 + m_2] g l_1 \cos(\varphi_1) - m_2 g l_2 \cos(\varphi_2)$$

- c) Für den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$ sowie $l_1 = l_2 = l$ vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen aus (1) bzw. die Definierten Abkürzungen zu

$$M = \frac{1}{2} \quad Q = 1 \quad \omega^2 = \omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{g}{l}$$

Für die Bewegung gilt nun

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi}_1 &+ \frac{1}{2} (\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + \omega^2 \sin(\varphi_1) = 0 \\
 \ddot{\varphi}_2 &+ \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \omega^2 \sin(\varphi_2) = 0
 \end{aligned}$$

Für Fixpunkte gilt nun $\ddot{\varphi}_i = 0$ sowie $\dot{\varphi}_i = 0$. Nach den Bewegungsgleichungen muss für die Fixpunkte gelten

$$\sin(\varphi_1) = 0 = \sin(\varphi_2)$$

hieraus folgen die Fixpunkte bei $\varphi_1, \varphi_2 \in \{0; \pi\}$. Dabei ist nur die Lage $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ stabil.

Weiter gilt für kleine Auslenkungen φ_1 und φ_2

$$\sin(\varphi_i) \approx \sin(0) + \cos(0)\varphi_i + \dots = \varphi_i \quad \cos(\varphi_i) \approx \cos(0) - \sin(0)\varphi - \dots = 1$$

Hiermit vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi}_1 &+ \frac{1}{2} (\ddot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2 (\varphi_1 - \varphi_2)) + \omega^2 \varphi_1 = 0 \\
 \ddot{\varphi}_2 &+ \ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1^2 (\varphi_1 - \varphi_2) + \omega^2 \varphi_2 = 0
 \end{aligned}$$

Auch diese sind noch nicht Analytisch lösbar. Eine weitere Approximation für kleine Winkel ist durch $\dot{\varphi}_2^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \approx 0$ gegeben. So entstehen die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi}_1 &+ \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_2 + \omega^2 \varphi_1 = 0 \\
 \ddot{\varphi}_2 &+ \ddot{\varphi}_1 + \omega^2 \varphi_2 = 0
 \end{aligned}$$

oder umgeformt, so dass explizite Differentialgleichungen entstehen. Diese bilden ein System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \omega \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Jordan-Form kann die Matrix A auch als

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{:=Q} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 - \sqrt{2} & \sqrt{2} + 1 \\ -2 + \sqrt{2} & -\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}}_{:=Q^{-1}}$$

geschrieben werden. Es ist also mit Hilfe eines Tricks

$$A = Q \underbrace{\begin{pmatrix} i\sqrt{2 + \sqrt{2}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{:=J} Q^{-1} Q \begin{pmatrix} i\sqrt{2 + \sqrt{2}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Die Matrix A als Produkt zweier Matrizen darstellbar. Es ist $A = (QJQ^{-1})^2$. Formal ist nun die Lösung der Differentialgleichung $\ddot{\underline{\varphi}} = \omega^2 A \underline{\varphi}$ gegeben durch:

$$\underline{\varphi} = Q^{-1} \exp(\omega J t) Q c$$

wobei der Vektor c durch die Anfangsbedingungen gegeben ist. Mit den Abkürzungen

$$\omega_1 := \sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega \quad \omega_2 := \sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega$$

ist so

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C e^{i\omega_1 t} + D e^{i\omega_2 t} \\ \varphi_2 &= -\sqrt{2} C e^{i\omega_1 t} + \sqrt{2} D e^{i\omega_2 t} \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden.

- d) Im Falle keiner Erdbeschleunigung ergibt sich die Langragefunktion des Systems als den Anteil der Kinetischen Energie. Es ist

$$L = T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}l^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Einfach zu sehen ist nun dass eine Rotation des Bezugssystems die Lagragedichte nicht verändert. Für $\bar{\varphi}_i = \varphi_i + \alpha$ ist so

$$\bar{L}(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}) = L(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}) + \frac{d}{dt} 0$$

Nach dem Noether-Theorem erhält man hieraus eine Erhaltungsgröße durch

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}}_{=-1} - \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \alpha}}_{=0}$$

Bleibt zu zeigen, dass es sich bei J um einen Drehimpuls des Systems handelt. Es ist

$$\begin{aligned}
J &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 - m_2l^2\dot{\varphi}_2 - m_2l_1l_2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
&= -m_1l_1^2\dot{\varphi}_1 - m_2(l_1^2\dot{\varphi}_1 + l_1l_2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2^2\dot{\varphi}_2) \\
&= -m_1l_1^2\dot{\varphi}_1(\sin(\varphi_1)^2 + \cos(\varphi_1)^2) \\
&\quad -m_2(l_1^2\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1)^2 + \dot{\varphi}_1l_1l_2\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \dot{\varphi}_2l_1l_2\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + l_2^2\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2)^2) \\
&\quad -m_2(l_1^2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1)^2 + \dot{\varphi}_1l_1l_2\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \dot{\varphi}_2l_1l_2\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + l_2^2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2)^2) \\
&= m_1[\underbrace{(l_1\sin(\varphi_1))}_{=r_1^x}(\underbrace{-l_1\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1)}_{\dot{r}_1^y}) - \underbrace{(l_1\cos(\varphi_1))}_{=r_1^y}(\underbrace{l_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1)}_{\dot{r}_1^x})] \\
&\quad + m_2[\underbrace{(l_1\sin(\varphi_1) + l_2\sin(\varphi_2))}_{r_2^x}(\underbrace{-l_1\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1) - l_2\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2)}_{\dot{r}_2^y})] \\
&\quad - m_2[\underbrace{(l_1\cos(\varphi_1) + l_2\cos(\varphi_2))}_{r_2^y}(\underbrace{l_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1) + l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2)}_{=\dot{r}_2^x})] \\
&= m_1(\underline{r}_1 \times \underline{\dot{r}}_1) + m_2(\underline{r}_2 \times \underline{\dot{r}}_2)
\end{aligned}$$

Die gefundene Erhaltungsgröße entspricht dem Gesamtdrehimpuls des Systems.

Übungsblatt 12 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 51: Hamiltonsche Mechanik

- a) i. Ist die Hamilton-Funktion eines Systems mit

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

gegeben, so gilt für

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H &= \frac{p\dot{p}}{m} + mg\dot{q} = -\frac{p}{m} \frac{\partial H}{\partial q} + mg \frac{\partial H}{\partial p} \\ &= -\frac{p}{m}mg + mg\frac{p}{m} = 0 \end{aligned}$$

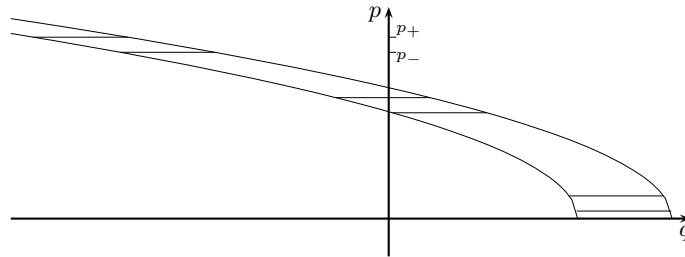
Die Hamiltonfunktion ist zeitlich konstant und stellt somit die Energie dar. Es ist

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

oder aufgelöst nach der Variablen p

$$p = \sqrt{2m(E - mgq)}$$

- ii. Die Trajektorie im Phasenraum ist nun gegeben durch



Das Phasenraumvolumen zu den Impulsen p_+ und p_- ist hierbei konstant.

- b) i. Es ist die Poisson-Klammer für f -dimensionale Funktionen

$$\begin{aligned} \{F, GK\} &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial(GK)}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial(GK)}{\partial q_i} \\ &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \left(G \frac{\partial K}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial p_i} K \right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(G \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial q_i} K \right) \\ &= G \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial q_i} + K \sum_{i=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ &= \{F, G\}K + G\{F, K\} \end{aligned}$$

ii. Für eine Funktion $A(p, q)$ des Phasenraums gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \{A, H\}\end{aligned}$$

iii. Für die Funktionen p, q und H ist:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{d}{dt}q = \{q, H\} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial q}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial q}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= \frac{d}{dt}p = \{p, H\} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial p}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \sum_{i=1}^f -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{d}{dt}H &= \{H, H\} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0\end{aligned}$$

Eine Funktion des Phasenraumes A ist dann Konstant, wenn die Poisson-Klammer mit der Hamiltonfunktion verschwindet. Dann ist

$$0 = \frac{d}{dt}A = \{A, H\}$$

iv. Die Ableitung der Funktion A nach α mit den neuen Koordinaten muss um invariant zu bleiben verschwinden. Es muss gelten

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{d\alpha}A(Q, P) = \frac{d}{d\alpha}A\left(q + \alpha \frac{\partial G}{\partial p}, p + \alpha \frac{\partial G}{\partial q}\right) \\ &\approx \frac{d}{d\alpha}\left(A(q, p) + \frac{\partial A}{\partial Q} \alpha \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \alpha \frac{\partial G}{\partial q}\right) \\ &= \frac{d}{d\alpha}A(q, p) + \frac{d}{d\alpha} \alpha \{A, G\} = \{A, G\}\end{aligned}$$

Für eine Konstante der Bewegung $J(p, q)$ gilt nun

$$\{J, H\} = \frac{d}{dt}J = 0$$

Diese kann also eine erzeugende einer Verschiebung sein, die die Hamiltonfunktion, eine Funktion des Phasenraumes, in linearer Ordnung invariant lässt.

- v. Wie bereits gezeigt ist A_{ij} dann eine Erhaltungsgröße, wenn die Poisson-Klammer mit der Hamiltonfunktion verschwindet. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}
\{A_{ij}, H\} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \\
&= \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \\
&= \frac{1}{2} m \omega^2 q_j \frac{p_i}{m} - \frac{1}{2m} p_j m \omega^2 q_i + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i \frac{p_j}{m} - \frac{1}{2m} p_i m \omega^2 q_j \\
&= \frac{1}{2} \omega^2 q_j p_i - \frac{1}{2} \omega^2 p_i q_j + \frac{1}{2} \omega^2 q_i p_j - \frac{1}{2} \omega^2 p_j q_i = 0
\end{aligned}$$

Somit ist A_{ij} eine Erhaltungsgröße des entarteten harmonischen Oszillators.

Übungsblatt 13 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 43: Barometer

a) Für den Druck P der Luftsäule gilt

$$P = P_0 + \frac{F}{A}$$

wobei P_0 den Umgebungsdruck und F die Kraft der Quecksilbersäule aufgrund der Gravitation darstellt. Es ist

$$P_1 = P_0 - \frac{mg}{A} = P_0 - \frac{\rho g l_0 A}{A} = P_0 - \rho g l_0$$

und analog

$$P_2 = P_0 + \rho g l_0$$

mit der Quecksilberdichte ρ . Weiter gilt

$$p_1 V_1 = p_1 A l_1 = p_2 A l_2 = p_2 V_2$$

Aus der Addition der Ersten beiden Gleichungen folgt nun

$$2P_0 = P_1 + P_2 = P_2 \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) = (P_0 - \rho g l_0) \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)$$

und aufgelöst nach P_0

$$P_0 = \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} \rho g l_0$$

Mit den angegebenen Werten und $\rho = 13579 \text{ kg/m}^3$ ist so

$$P_0 \approx 99.9 \text{ kPa}$$

b) Wird das Glasrohr um einen Winkel φ zur senkrechten Achse gedreht, so wirkt nun eine Kraft

$$F = \rho g l_0 A \cos(\varphi)$$

Für die Länge der Luftsäule l_3 gilt so

$$l_3 = \frac{P_2}{P_3} l_2 = \frac{P_0 + \rho g l_0}{P_0 + \rho g l_0 \cos(\varphi)} l_2$$

Mit dem Umgebungsdruck aus dem ersten Teil ist so

$$l_3 = \frac{\frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} \rho g l_0 + \rho g l_0}{\frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} \rho g l_0 + \rho g l_0 \cos(\varphi)} l_2 = \frac{2l_1 l_2}{(l_1 + l_2) + \cos(\varphi)(l_1 - l_2)}$$

Die eingesetzten Werte liefern nun

$$l_3 \approx 27.27 \text{ cm}$$

Übungsblatt 13 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 56: Virialsatz

- a) Aus der Energieerhaltung des Systems, also $\frac{\partial}{\partial t}L = 0$ folgt, dass die die Hamiltonsche Funktion ergibt als

$$\sum_{i=1}^N p_i \dot{r}_i - L = H = T + U$$

Mit der Lagrangefunktion als $L = T - U$ folgt so durch Addition der Gleichung

$$2T = \sum_{i=1}^N p_i \dot{r}_i$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 2\bar{T} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau 2T dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau \sum_{i=1}^N p_i \dot{r}_i dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \int_0^\tau p_i \dot{r}_i dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left([p_i r_i]_0^\tau - \int_0^\tau \dot{p}_i r_i dt \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\left[\sum_{i=1}^N p_i r_i \right]_0^\tau}_{=0 \text{ für } \frac{d}{dt}G=0} + \sum_{i=1}^N \int_0^\tau \frac{\partial H}{\partial r_i} r_i dt \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau \frac{\partial U}{\partial r_i} r_i dt = \sum_{i=1}^N \overline{\frac{\partial U}{\partial r_i} r_i} \end{aligned}$$

Hierbei ist $\frac{d}{dt}G = 0$ für $G(t)$ beschränkt, da aus $|G(t)| \leq C$ folgt

$$\frac{d}{dt}|G(t)| \leq \frac{d}{dt}C = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}G(t) = 0$$

- b) Für eine Homogene Funktion gilt

$$\frac{d}{d\lambda} U(\lambda r_1, \dots, \lambda r_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial r_i} r_i$$

ebenfalls gilt

$$\frac{d}{d\lambda} \lambda^N U = N \lambda^{N-1} U$$

Somit ist

$$N \lambda^{N-1} U = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial r_i} r_i$$

für eine beliebige Konstante λ . Für $\lambda = 1$ folgt das Eulertheorem. Mit dem ersten Teil gilt nun

$$2\bar{T} = \sum_{i=1}^N \overline{\frac{\partial U}{\partial r_i} r_i} = N\bar{U}$$

c) Die rechte Seite der angegebenen Gleichung lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\bar{T} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \overline{r_i \frac{\partial U_{in}}{\partial r_i}} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \overline{\frac{\partial U}{\partial r_i} r_i} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \overline{r_i \frac{\partial U_{in}}{\partial r_i}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \overline{\left(\frac{\partial U}{\partial r_i} - \frac{\partial U_{in}}{\partial r_i} \right) r_i} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \overline{\frac{\partial U_w}{\partial r_i} r_i} \end{aligned}$$

Die Ursache einer Potentialänderung der Teilchen mit der Wand ist eine Kraft dF_i . Weiter erhält man also

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \overline{\frac{\partial U_w}{\partial r_i} r_i} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \overline{r_i \frac{dF_i}{dA} dA}$$

Für einen Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ betrachtet man nun nur die zeitlich gemittelten Größen. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \overline{r_i \frac{dF_i}{dA} dA} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \oint \bar{r} \underbrace{\frac{d\bar{F}}{dA}}_{=P} dA$$

Die Anwendung des Gausschen Satzes liefert nun

$$\frac{1}{3} \oint \bar{r} \underbrace{\frac{d\bar{F}}{dA}}_{=P} dA = \frac{1}{3} P \int \underbrace{\text{div}(r)}_{=3} dV = PV$$

was zu zeigen war.

Übungsblatt 14 IK3 Experimentalphysik

Aufgabe 57: Benzinmotor

- a) Der Wirkungsgrad eines Benzinmotors ergibt sich aus dem Quotienten der vom System verrichteten Arbeit und der zugeführten Wärme. Es ist

$$\eta = \frac{\Delta W}{Q_w}$$

Im Kreisprozess ergibt sich die geleistete Arbeit $\Delta W = Q_w - Q_k$ und somit der Wirkungsgrad als

$$\eta = \frac{Q_w - Q_k}{Q_w} = 1 - \frac{Q_k}{Q_w}$$

Mit der Definition der Wärmekapazität $Q_w = c_p(T_3 - T_2)$ und $Q_k = c_p(T_4 - T_1)$ folgt unter der Annahme einer konstanten Wärmekapazität.

$$\eta = 1 - \frac{c_p(T_4 - T_1)}{c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

- b) Bei der adiabatischen Kompression und Expansion des Benzin-Luft-Gemisches gilt, wenn V_2 das Volumen bei Zustand 1 bzw. 4 bezeichnet

$$T_4 V_2^{\kappa-1} = T_3 V_1^{\kappa-1} \quad T_1 V_2^{\kappa-1} = T_2 V_1^{\kappa-1}$$

Umgeformt und eingesetzt in die Gleichung zur Bestimmung des Wirkungsgrades ist

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}}{T_4 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} - T_2} = 1 - \frac{T_4 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} - T_2}{T_4 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} - T_2} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$$

- c) Mit $\kappa = 1.4$ und $V_2/V_1 = 1/8$ ergibt sich so ein Wirkungsgrad von

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{0.4} \approx 0.565$$

- d) Die Annahme von $\kappa = 1.4$ ist in diesem Fall gerechtfertigt, da für ein System mit f Freiheitsgraden gilt

$$\kappa = \frac{f+2}{f}$$

Das Modell eines zweiatomigen Gases liefert nun 3 Freiheitsgrade der Translation und 2 mögliche Freiheitsgrade der Rotation. Eine Rotation um die Bindungsachse ist bei den betrachteten Temperaturbereichen nicht als Freiheitsgrad zu werten. Auch eine Vibration des Moleküls wird vernachlässigt. Es ist demnach $f = 5$ woraus sich $\kappa = 7/5 = 1.4$ folgern lässt.

- e) Der Wirkungsgrad eines idealen Ottomotors liegt unterhalb des theoretisch errechnen Werts bei $\eta \leq 0.37$. Gründe für das Abweichen von idealisierten Modell sind unter anderem, die Reibungsverluste beim Ansaugen und Ausstoßen des Luft-(Ab)Gas-Gemisches. Zusätzlich wird Wärme während des Expansionsprozesses $3 \rightarrow 4$ an den Motorblock abgegeben. Da die Oxidationsreaktion vom Brennstoff im Zylinder in endlicher Zeit von statten geht, ist die Kurve in Punkt 4 im P-V-Diagramm abgeflacht. Zudem wird bei der theoretischen Rechnung ein ideales Gas betrachtet, welches das Benzin-Luft-Gemisch nur schlecht beschreibt, gerade weil sich die chemischen Verbindungen und damit die physikalischen Eigenschaften des Gases während des Prozesses verändern.

Übungsblatt 14 IK3 Theoretische Physik

Aufgabe 59: Eindimensionale Diffusionsgleichung

a) Betrachtet man beide Seiten die Eindimensionale Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n$$

so ergibt sich die Fouriertransformation der linken Seite

$$FT \left[\frac{\partial}{\partial t} n \right] = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}$$

sowie für die Fouriertransformation der rechten Seite

$$\begin{aligned} FT \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} n \right] &= \int dx e^{ikx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} n = \underbrace{\left[e^{ikx} \frac{\partial}{\partial x} n \right]}_{=0} - \int dx ik e^{ikx} \frac{\partial}{\partial x} n \\ &= -k^2 \int dx e^{ikx} n = -k^2 \tilde{n} \end{aligned}$$

Im Fourierraum vereinfacht sich die Partielle Differentialgleichung zu der gewöhnlichen Differentialgleichung.

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}(k, t) = -Dk^2 \tilde{n}(k, t)$$

Die Anfangsbedingungen sind hier gegeben durch

$$\tilde{n}_0(k) = \int dx e^{ikx} n(x, 0) = \int dx e^{ikx} N_0 \delta(x - x_0) = N_0 e^{ikx_0}$$

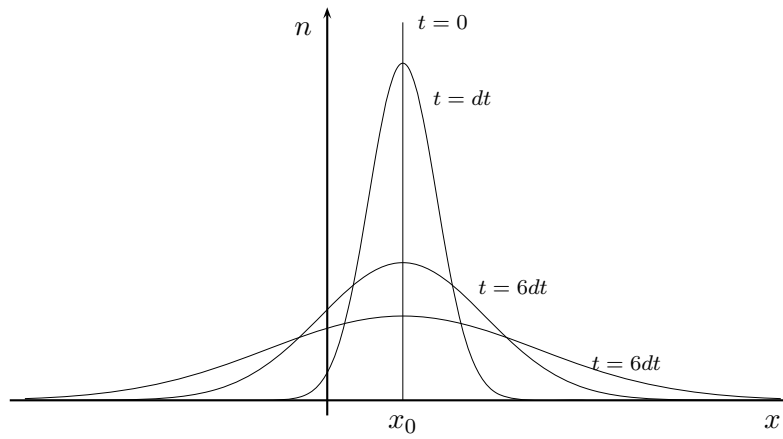
Es ist demnach

$$\tilde{n}(k, t) = N_0 e^{ikx_0} e^{-Dk^2 t}$$

Die Rücktransformation liefert nun die Funktion im Ortsraum

$$\begin{aligned} n(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} N_0 e^{ikx_0} e^{-Dk^2 t} \\ &= \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-(Dk^2 t - ik(x-x_0))} \\ &= \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\left(\sqrt{Dt}k - \frac{i(x-x_0)}{\sqrt{4Dt}}\right)^2} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} \\ &= \frac{N_0}{2\pi} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-Dt k^2}}_{= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{Dt}}} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{4Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} \end{aligned}$$

b) Es ergibt sich so eine Dichteverteilung, die mit der Zeit räumlich divergiert und symmetrisch um den Punkt der Störung x_0 ist.



c) Für die Mittlere Verschiebungsdichte gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned}
 \langle (x - x_0)^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx n(x, t) (x - x_0)^2 = \frac{N_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{4Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} (x - x_0)^2 \\
 &= \frac{N_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{4Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4Dt}} x^2 = \frac{N_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{Dt}} \underbrace{\int_0^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4Dt}} x^2}_{= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sqrt{4Dt}^3} \\
 &= \frac{N_0}{4} \frac{\sqrt{4Dt}^3}{\sqrt{4Dt}} = 2N_0Dt
 \end{aligned}$$

Hier verschwindet das Mittel über die Abweichungen denn

$$\begin{aligned}
 \langle (x - x_0) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx n(x, t) (x - x_0) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{4Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4Dt}} x \\
 &= \frac{N_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{4Dt}} \left(\int_0^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4Dt}} x + \int_{-\infty}^0 dx e^{-\frac{x^2}{4Dt}} x \right) \\
 &= \frac{N_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{4Dt}} \left(\int_0^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4Dt}} x - \int_0^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4Dt}} x \right) = 0
 \end{aligned}$$