Übungsblatt 1 IK2

Aufgabe 1: Oberflächenenergie und Auftriebskorrektur

a) Gesucht ist die Änderung der Oberflächenenergie $\Delta W = \varepsilon \Delta A$
Zu Betracheten ist die gesamte Oberflächenänderung ΔA mit:

$$\begin{aligned} \Delta A &= A_2 - A_1 \text{ mit:} \\ A_1 &= 4\pi {r_1}^2 \qquad A_2 = N \cdot 4\pi {r_2}^2 \end{aligned}$$

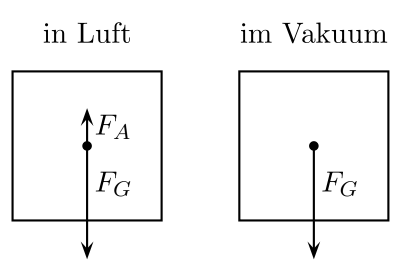
Die Anzahl der kleinen Tröpfchen N kann mit den Volumina berechnet werden:

$$N = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi {r_1}^3}{\frac{4}{3}\pi {r_2}^3} = \frac{{r_1}^3}{{r_2}^3}$$

Somit ergibt sich für die Oberflächenenergieänderung:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \varepsilon \Delta A = \sigma(A_2 - A_1) \\ &= \sigma(N \cdot 4\pi {r_2}^2 - 4\pi {r_1}^2) \\ &= \sigma\left(\frac{{r_1}^3}{{r_2}^3} \cdot 4\pi {r_2}^2 - 4\pi {r_1}^2\right) \\ &= \sigma 4\pi {r_1}^2 \left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right) \\ &= 4 \cdot 73 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m} \cdot \pi \cdot (3 \cdot 10^{-3} m)^2 \left(\frac{3 \cdot 10^{-3} m}{3 \cdot 10^{-7} m} - 1\right) \\ &\approx 0.0826 J \end{aligned}$$

b) Das Gewicht eines Körpers ist unabhängig von der Umgebung. Folglich würden beide Körper im Vakuum ebenfalls $100g$ wiegen. Mit der Annahme auf beide Körper wirke in Luft eine Gesamtskraft von $F_{Ges} = 1N$:



In Luft ist $F_{Ges} = F_G - F_A$ mit:

$$F_A = m_L g = V_K \rho_L g \qquad F_G = m_K g = V_K \rho_K g$$

Hier ist $m_{K/L}$ die Masse des Körpers/der verdrängten Luft, V_K das Volumen des Körpers und $\rho_{K/L}$ die Dichte des Körpers/Luft.
Somit ist:

$$\begin{aligned} F_{Ges} &= F_G - F_A = gV_K\rho_K - gV_K\rho_L \\ &= gV_K(\rho_K - \rho_L) \\ \Rightarrow V_K &= \frac{F_{Ges}}{g(\rho_K - \rho_L)} \end{aligned}$$

Mit dem Volumen und der Dichte des Körpers kann jetzt das Gewicht des Körpers (und damit auch die Gewichtskraft im Vakuum) bestimmt werden:

$$m_K = V_K\rho_K = \frac{F_{Ges}}{g(\rho_K - \rho_L)}\rho_K \qquad \Rightarrow \qquad F_G = \frac{F_{Ges}}{(\rho_K - \rho_L)}\rho_K$$

Für den Aluminiumkörper:

$$\begin{aligned} m_{Al} &= \frac{1N}{10\frac{m}{s^2}(2.7\frac{g}{cm^3} - 1.3 \cdot 10^{-3}\frac{g}{cm^3})}2.7\frac{g}{cm^3} \approx 100.048g \\ F_{G_{Al}} &= \frac{1N}{(2.7\frac{g}{cm^3} - 1.3 \cdot 10^{-3}\frac{g}{cm^3})}2.7\frac{g}{cm^3} \approx 1.00048N \end{aligned}$$

Für den Bleikörper:

$$\begin{aligned} m_{Pb} &= \frac{1N}{10\frac{m}{s^2}(11.3\frac{g}{cm^3} - 1.3 \cdot 10^{-3}\frac{g}{cm^3})}11.3\frac{g}{cm^3} \approx 100.012g \\ F_{G_{Pb}} &= \frac{1N}{10\frac{m}{s^2}(11.3\frac{g}{cm^3} - 1.3 \cdot 10^{-3}\frac{g}{cm^3})}11.3\frac{g}{cm^3} \approx 1.00012N \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Ausflussgeschwindigkeit

a) Für das Wasser im Gefäß gilt die Bernoulli-Gleichung $\frac{1}{2}\rho u^2 + p = const$. Der angegebene Druck teilt sich hierbei in zwei Komponenten auf. Der Schweredruck mit $p = \rho gh$ und äußere Drücke, die vernachlässigt werden.
An der Grundlinie des Gefäßes sei der Nullpunkt. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho u_{Sp}^2 + \rho gh &= \frac{1}{2}\rho u_{Aus}^2 \\ \text{aus: } u_{Sp}A_{Sp} = u_{Aus}A_{Aus} \quad \Rightarrow \quad u_{Aus} &= \frac{A_{Sp}}{A_{Aus}}u_{Sp} \\ \Rightarrow \rho gh &= \frac{1}{2}\rho u_{Sp}^2\left(\frac{A_{Sp}^2}{A_{Aus}^2} - 1\right) \\ \Rightarrow u_{Sp}^2 &= \frac{2gh}{\left(\frac{A_{Sp}^2}{A_{Aus}^2} - 1\right)} = \frac{2gh}{\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)} \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung $d^4 << D^4$ kann der Term $\frac{D^4}{d^4} - 1$ durch $\frac{D^4}{d^4}$ ersetzt werden. Somit ergibt sich für die Absinkgeschwindigkeit des Flüssigkeitspiegels v_{St}:

$$u_{Sp} = \frac{\sqrt{2gh}}{\frac{D^2}{d^2}} = \frac{\sqrt{2gh}d^2}{D^2}$$

b) Die Absinkgeschwindigkeit v_{Sp} kann in mit der Formel aus Teil a errechnet werden:

$$u_{Sp} = \frac{\sqrt{2gh}d^2}{D^2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0.2m}\ 1.7^2 cm^2}{70^2 cm^2} = 1.18\frac{cm}{s}$$

Für die Ausflussgeschwindigkeit gilt:

$$u_{Aus} = \frac{A_{Aus}}{A_{Sp}} v_{Sp} = \sqrt{2gh}\frac{d}{D}\frac{D}{d} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0.2m} = 2\frac{m}{s}$$

c) Für das Absinken im Gefäß gilt:

$$\begin{aligned} u_{Sp} = \frac{dh}{dt} &= \sqrt{2gh}\frac{d^2}{D^2} \\ \Rightarrow dt &= \frac{D^2}{\sqrt{2gh}\ d^2} \\ \Rightarrow T = \int_0^T dt &= \frac{D^2}{\sqrt{2g}d^2}\int_0^H \frac{1}{\sqrt{h}}dh = \frac{D^2}{\sqrt{2g}d^2}\left[2\sqrt{h}\right]_0^H \\ &= \frac{2\sqrt{H}D^2}{\sqrt{2g}d^2} \end{aligned}$$

In einer Höhe von $H = 1m$ ergibt sich also für die Ausflusszeit T

$$T = \frac{2\sqrt{H}D^2}{\sqrt{2g}d^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{1m} \cdot 70^2 cm^2}{\sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2}} \cdot 1.4^2 cm^2} \approx 1118s$$

d) Bei einem konstanten Wasserspiegel, also einer konstanten Höhe, bleibt auch die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers konstant. So kann das Ausflussvolumen(V_{Aus}) pro Zeiteinheit mit $V_{Aus} = u_{Aus}A_{Aus}t$ errechnet werden. Es gilt für die Ausflusszeit t:

$$\begin{aligned} t &= \frac{V}{A_{Aus}\ u_{Aus}} = \frac{A_{Sp}\ h}{A_{Aus}\ \sqrt{2gh}} \\ &= \frac{D^2 h}{d^2\sqrt{2gh}} = \frac{D^2\sqrt{h}}{d^2\sqrt{2g}} \\ &= \frac{70^2 cm^2 \cdot \sqrt{1m}}{1.4^2 cm^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2}}} \approx 559s \end{aligned}$$

Bei konstantem Wasserspielgel benötigt das Ausfließen des gleichen Volumens also nur die halbe Zeit.

Übungsblatt 2 IK2

Aufgabe 1: Impulssatz
Im Zeitraum dt fließt am Ball eine Masse M vobei und verliert dabei einen Impuls von dp. dp kann durch den Impuls vor und nach dem Ball errechnet werden:

$$dp = p_2 - p_1 = M(v_2 - v_1)$$

Nun kann die Masse, die im Zeitraum dt am Ball vorbeifließt mit

$$m = \rho dV = \rho v_1 A dt$$

bestimmt werden, wobei A die Fläche des Luftauslasses ist. Setzt man nun in die Gleichung für den Impuls ein erhällt man:

$$dp = \rho v_1 A(v_1 - v_2)dt$$

Nun ist zu beachten, dass nur Geschwindigkeiten in y-Richtung für die haltende Kraft verantworlich sind, somit ergibt sich:

$$F_y = \frac{dp}{dt} = \rho v_1(\sin(\alpha_2)v_2 - \sin(\alpha_1)v_1)$$

Mit der Relation $v_2 = \frac{3}{4}v_1$

$$F_y = \rho v_1^2 A(\frac{3}{4}\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1))$$

Aus der Annahme, die x-Komponenten der Geschwindigkeit seien konstant folgt:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha_1)v_1 &= v_x = \cos(\alpha_2)v_2 = \frac{3}{4}\cos(\alpha_2)v_1 \\
\Rightarrow (\cos(\alpha_2))^2 &= \left(\frac{4}{3}\cos(\alpha_1)\right)^2 \\
\Rightarrow 1 - (\sin(\alpha_2))^2 &= \left(\frac{4}{3}\cos(\alpha_1)\right)^2 \\
\Rightarrow \sin(\alpha_2) &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3}\cos(\alpha_1)\right)^2}
\end{aligned}$$

Eingesetz in die Gleichung für die Kraft:

$$F_y = \rho v_1^2 A \left(\frac{3}{4}\sqrt{1 - \left(\frac{4}{3}\cos(\alpha_1)\right)^2} - \sin(\alpha_1)\right)$$

Gesucht ist die maximale Masse(m) der Kugel

$$\begin{aligned}
m &= \frac{F_y}{g} = \frac{\rho v_1^2 \pi \frac{d^2}{4}\left(\frac{3}{4}\sqrt{1-\left(\frac{4}{3}\cos(\alpha_1)\right)^2} - \sin(\alpha_1)\right)}{g} \\
&= \frac{1.294\frac{kg}{m^3}\cdot 15^2\frac{m^2}{s^2}\pi\frac{0.12^2 m^2}{4}\left(\frac{3}{4}\sqrt{1-\left(\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{-10\frac{m}{s^2}} \\
&\approx 153g
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Arbeit gegen den Luftwiederstand

a) Für das beschleunigende Auto gilt:

$$v(t) = at \qquad \Rightarrow \quad a = \frac{v_{max}}{T} \qquad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{v_{max}}{T}t$$

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{v_{max}}{T}t^2 \qquad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{2T}{v_{max}}s$$

Nun gilt für den Luftwiederstand:

$$F_R = \frac{1}{2}\rho c_w A(v(t))^2$$

Für die gegen den Luftwiederstand verrichtete Arbeit gilt:

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{S_{max}} F(s)ds = \\
&= \int_0^{\frac{v_{max}T}{2}} \frac{1}{2}\rho c_w A(v(s))^2 ds \\
&= \int_0^{\frac{v_{max}T}{2}} \frac{1}{2}\rho c_w A\frac{v_{max}}{T}2s ds \\
&= \rho c_w A\frac{v_{max}}{T}\int_0^{\frac{v_{max}T}{2}} s ds \\
&= \rho c_w A\frac{v_{max}}{T}\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^{\frac{v_{max}T}{2}} \\
&= \frac{1}{8}\rho c_w A v_{max}^2 T \\
&= \frac{1}{8}\cdot 1.294\frac{kg}{m^3}\cdot 0.4\cdot 2m^2\cdot\left(\frac{1000}{36}\right)^3\frac{m^3}{s^3}\cdot 12s \\
&\approx 33.281kJ
\end{aligned}$$

b) Die Momentanleistung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
P(t) &= F(t)v(t) \\
&= \frac{1}{2}\rho c_w A\frac{v_{max}^3}{T^3}t^3
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Endleistung:

$$\begin{aligned} P(T) &= \frac{1}{2}\rho c_w A \frac{v_{max}^3}{T^3} T^3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1.294 \frac{kg}{m^3} \cdot 0.4 \cdot 2m^2 \left(\frac{1000}{36}\right)^3 \frac{m^3}{s^3} \\ &\approx 11.093kW \end{aligned}$$

Die durchschnittliche Leistung $\overline{P}$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho c_w A \frac{v_{max}^3}{T^3} t^3 dt \\ &= \frac{1}{2}\rho c_w A \frac{v_{max}^3}{T^4} \int_0^T t^3 dt \\ &= \frac{1}{2}\rho c_w A \frac{v_{max}^3}{T^4} \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^T \\ &= \frac{1}{8}\rho c_w A v_{max}^3 \\ &= \frac{1}{8} \cdot 1.294 \frac{kg}{m^3} \cdot 0.4 \cdot 2m^2 \cdot \left(\frac{1000}{36}\right)^3 \frac{m^3}{s^3} \\ &\approx 2.773kW \end{aligned}$$

Übungsblatt 3 IK2

Aufgabe 1: Dirac δ-Funktion

a)

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\delta'(x-x_0)dx &= [f(x)\delta(x-x_0)]_a^b - \int_a^b f'(x)\delta(x-x_0)dx \\
&= 0 - \int_a^b f'(x)\delta(x-x_0)dx \\
&= \int_a^b f'(x_0)\delta(x-x_0)dx
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (x^2+y^2-2)\delta(x^2-4)dx &= \int_1^3 (x^2+y^2-2)\left(\frac{\delta(x-2)}{4}+\frac{\delta(x+2)}{4}\right)dx \\
&= \int_1^3 (x^2+y^2-2)\frac{\delta(x-2)}{4}dx \\
&= \frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\delta(x^3-x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\left[\frac{\delta(x-1)}{2}+\delta(x)+\frac{\delta(x+1)}{2}\right]dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\frac{\delta(x-1)}{2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\delta(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\frac{\delta(x+1)}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}e^1+1+\frac{1}{2}e^{-1} \approx 2.54
\end{aligned}$$

c) Die δ-Distribution in Polarkoordinaten.
Auch für Polarkoordinaten gilt:

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq \\ 1 & \vec{r}=0 \end{cases}$$

Setzt man nun für den Vektor Polarkoordinaten ein erhällt man:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(r)$$

Weil man davon ausgehen kann ein Vektor habe nur dann einen von Null verschiedenen Wert, wenn r=0 ist.

Anders sieht es aus, wenn die Deltafunktion für die Summe/Differenz zweier Vektoren definiert werden soll. Hier gilt:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(|\vec{r}-\vec{r}_0|)=\delta(\sqrt{(r\sin(\varphi)-r_0\sin(\varphi_0))^2+(r\cos(\varphi)-r_0\cos(\varphi_0))^2}$$

Weitere Umformungen ergeben:

$$\begin{aligned}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) &= \delta(\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0(\sin(\varphi)\sin(\varphi_0)+\cos(\varphi)\cos(\varphi_0))})\\ &= \delta(\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)})\end{aligned}$$

Die Funktion $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ nimmt also nur für $\varphi=\varphi_0$ und $r=r_0$ den Wert 1 an.

Aufgabe 2: Vektoranalysis

a) Als erstes soll die Seite des Würfels betrachtet werden, die parallel zur xy-Ebene liegt.

$$\begin{aligned}\int_F \vec{A}(\vec{r})d\vec{f} &= \int_0^1\int_0^1 \vec{A}(\vec{r})\vec{e}_z dxdy\\ &= \int_0^1\int_0^1 z^2 dxdy\\ &= \int_0^1 z^2 dy = z^2\end{aligned}$$

Die anderen Seiten können analog berechnet werden. So gilt:

$$\begin{aligned}\int_F \vec{A}(\vec{r})d\vec{f} &= \left[\int_0^1\int_0^1 \vec{A}(\vec{r})\vec{e}_z dxdy\right]_{z=0}^1\\ &\quad+\left[\int_0^1\int_0^1 \vec{A}(\vec{r})\vec{e}_y dxdz\right]_{y=0}^1\\ &\quad+\left[\int_0^1\int_0^1 \vec{A}(\vec{r})\vec{e}_x dydz\right]_{x=0}^1\\ &= \left[z^2\right]_{z=0}^1+\left[y^2\right]_{z=0}^1+\left[x^2\right]_{z=0}^1=3\end{aligned}$$

Die Berechnung durch den Gaußschen Satz:

$$\begin{aligned}\int_S \vec{A}(\vec{r})df &= \int_V \mathrm{div}(\vec{A}(\vec{r}))dV\\ &= \int_V (2x+2y+2z)dxdydz=\int_0^1\int_0^1(2x+2y+1)dxdy\\ &= \int_0^1 (2x+2)dx=3\end{aligned}$$

b) Es sei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\int_V \operatorname{rot}(A)dV &= \int_V \vec{a}\cdot\operatorname{rot}(A)dV \\
&= -\int_V 0-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}(A)dV \\
&= -\int_V \operatorname{rot}(\vec{a})\cdot A-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}(A)dV \\
&= -\int_V \operatorname{div}(A\times\vec{a})dV \\
&= -\int_{S(V)} (A\times\vec{a})\vec{df} \\
&= -\vec{a}\int_{S(V)} A\times\vec{df} \\
\Leftrightarrow \int_V \operatorname{rot}(A)dV &= -\int_{S(V)} A\times\vec{df}
\end{aligned}
$$

c) Der Satz von Stoke ist für das Vektorfeld ($A=(-y,yz^2,y^2z)$) zu verifizieren. Es werden für die Integrationen Kugelkoordinaten genutzt.
Es gilt:

$$\operatorname{rot}(A)=\begin{pmatrix}2zx-2zy\\0-0\\0+1\end{pmatrix}=\vec{e}_z=\cos(\varphi)\vec{e}_r-\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$$

Für $\vec{df}$ gilt:

$$\vec{df}=\vec{n}d\varphi d\theta=\vec{e}_r\sin(\varphi)d\varphi d\theta$$

Nun ist:

$$
\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot}(A)\vec{df} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(\varphi)\vec{e}_r-\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi)\cdot\vec{e}_r\sin(\varphi)d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

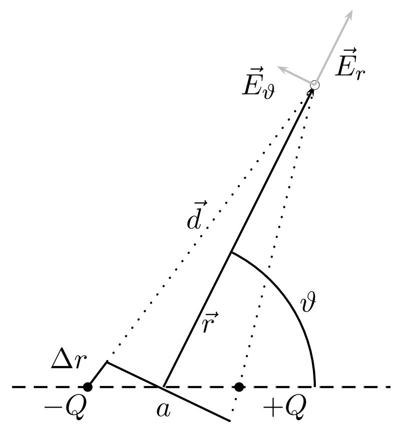
Die Rechnung unter der Ausnutzung des Satzes von Stokes:

$$
\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot}(A)\vec{df} &= \oint_{\partial S} A\vec{dr} \\
&= \int_0^{2\pi}(\sin(\varphi)\cos(\varphi)\vec{e}_r+\sin^2(\varphi)\vec{e}_\varphi)\vec{e}_\varphi d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)d\varphi \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

Übungsblatt 5 IK2

Aufgabe 1: Dipolfeld

a) Das elektrische Feld des Dipols ist Rotationssymmetrisch zur Achse durch die Dipolladungen, weswegen hier Kugelkoordinaten gewählt werden.



Nun gilt für das Potential des elektischen Feldes, da $|\vec{d}| \approx |\vec{r}|$ wenn $a \ll r$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r-\Delta r} - \frac{1}{r+\Delta r}\right]$$

Aus $a \ll r$ folgt $\Delta r^2 \ll r^2$ und damit ist

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r+\Delta r - r + \Delta r}{r^2+\Delta r^2}\right] \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2\Delta r}{r^2}\right]$$

Nun gilt $2\Delta r = a\cos(\vartheta)$ damit ist:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos(\vartheta)}{r^2}$$

Für das elektische Feld gilt nun:

$$\vec{E}(r) = -\mathrm{grad}(V) = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta$$

Damit ergibt sich mit ($\vec{d} = Q\vec{a}$):

$$\vec{E}(r,\vartheta) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos(\vartheta)}{r^3}\vec{e}_r + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\sin(\vartheta)}{r^3}\vec{e}_\vartheta = \frac{|d|}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos(\vartheta)\vec{e}_r + \sin(\vartheta)\vec{e}_\vartheta)$$

b) Der elektrische Fluss durch eine Kugeloberfläche um den Dipol ist gegeben durch:

$$\phi = \int_S \vec{E}\vec{df}$$

Mit dem elektrischen Feld aus Aufgabe a:

$$\begin{aligned}
\phi &= \int_S \vec{E}\vec{df} \\
&= \frac{|d|}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(2\cos(\vartheta)\vec{e}_r + \sin(\vartheta)\vec{e}_\vartheta)\vec{e}_r \sin(\vartheta) r^2 d\vartheta\, d\varphi \\
&= \frac{|d|}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta) d\vartheta\, d\varphi \\
&= \frac{|d|}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(2\vartheta) d\vartheta\, d\varphi \\
&= \frac{|d|}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi} 0 d\varphi = 0
\end{aligned}$$

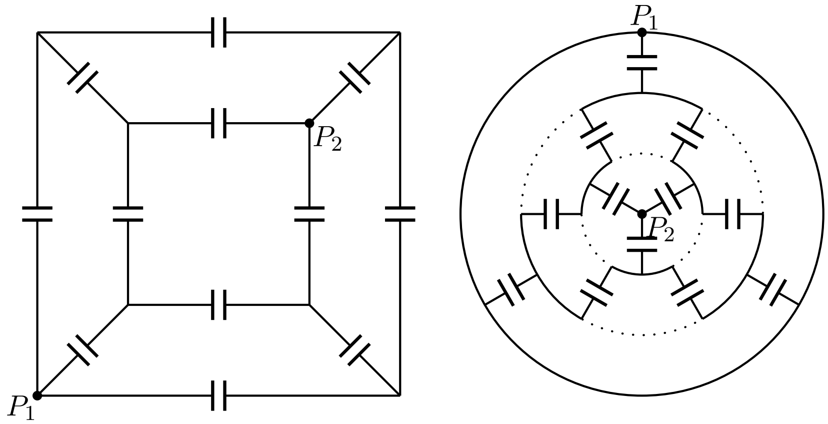
Eine andere Möglichkeit zur Berechnung des Flusses bietet das Gausssche Gesetz.

$$\begin{aligned}
\phi &= \int_S \vec{E}\vec{df} \\
&= \frac{-Q+Q}{\varepsilon_0} = 0
\end{aligned}$$

Übungsblatt 6 IK2

Aufgabe 1: Kondensator

a) Es soll ein Kondensatorwürfel untersucht werden, dessen Kanten jeweils einen Kondensator mit der Kapazität C darstellen.



Es soll die Kapazität zwischen den Punkten P_1 und P_2 errechnet werden. Durch eine Umordnung der Kondesatoren kann das Schaltbild links zu dem Schaltbild rechts umgewandelt werden.
Aufgrund der Symmetrie herrscht nach den ersten Kondensatoren jeweils gleiches elektrisches Potential, so dass die gepunktete Verbindung geschlossen werden kann, ohne dass sich die Gesamtkapazität ändert. Nun gilt:

$$C_{Ges} = \frac{1}{\frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C}} = \frac{6}{5}C$$

b) Es ist für einen Plattenkondensator U_0 C_0 gegeben.

1. Der Plattenabstand soll von d auf $2d$ vergrößert werden während die Spannungsquelle angeschlossen bleibt. Nun ist:

$$U = U_0 \qquad C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} = \frac{1}{2}C_0$$

$$E = \frac{U}{2d} = \frac{U_0}{2d} \qquad W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{4}C_0U_0^2$$

Für die Änderung der elektrischen Energie gilt:

$$\Delta W = W - W_0 = \frac{1}{4}C_0U_0^2 - \frac{1}{2}C_0U_0^2 = -\frac{1}{4}C_0U_0^2$$

Für die Kraft auf eine Platte des Kondensators gilt:

$$F(s) = \frac{1}{2}QE = \frac{\varepsilon_0 A}{s}U_0\frac{U_0}{s} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 AU_0\frac{1}{s^2}$$

Um die Platten vom Abstand d auf $2d$ zu bewegen muss also die Energie

$$\Delta W_{ph} = \int_d^{2d} F(s)ds = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 AU_0\frac{1}{2d} = -\frac{1}{4}C_0U_0^2$$

aufgebracht werden.

2. Der Plattenabstand soll von d auf $2d$ vergrößert werden nachdem die Spannungsquelle entfernt wurde. Nun ist:

$$Q = Q_0 = C_0U_0 \qquad C = \frac{1}{2}C_0$$

$$U = \frac{U}{C} = 2\frac{C_0U_0}{C_0} = 2U_0 \qquad W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{4}C_0 4U_0^2 = C_0U_0^2$$

Für die Änderungen der elektrischen Energie gilt

$$\Delta W = C_0U_0^2 - \frac{1}{2}C_0U_0^2 = \frac{1}{2}C_0U_0^2$$

Für die Kraft auf eine Platte des Kondensators gilt:

$$F(s) = \frac{1}{2}QE = \frac{1}{2}Q_0\frac{Q_0}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 A}$$

Um die Platten vom Abstand d auf $2d$ zu bewegen muss also die Energie

$$\Delta W_{ph} = \int_d^{2d} F(s)ds = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 A}d = \frac{1}{2}\frac{Q_0}{C_0} = \frac{1}{2}C_0U_0^2$$

aufgebracht werden.

Bei der Vergrößerung des Abstandes bei angeschlossener Spannungsquelle fällt auf, dass die aufgebrachte Energie zum Entfernen der Platte unterschiedlich zu der Änderung der Energie des elektrischen Feldes ist. Das liegt daran, dass die Energie, die aufgebracht werden muss um die Platten auseinander zu Bewegen zum Teil von der Spannungsquelle kompensiert wird. Es geht also keine Energie verloren.

c) Ein Kondensator der Kapazität C wird mit der Spannung U aufgeladen und nachdem die Spannungsquelle entfernt wurde, mit einem anderen Kondensator parallel geschaltet. Es gilt:

$$Q = CU \qquad C_2 = 2C \qquad Q \text{ konstant}$$

Nun ist die elektrische Feldenergie vor dem anschließen an den zweiten Kondensator

$$W_{el,1} = \frac{1}{2}CU^2$$

Nach dem Anschließen des zweiten Kondensators ist, wenn sich die Ladungen jeweils gleich auf den Platten verteilen:

$$W_{el,2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{4}CU^2$$

Hierbei fällt auf, dass sich die elektrische Energie verkleinert. Grund dafür ist die Annahme der Gleichverteilung der Ladungen auf beiden Kondensatorplatten. Durch das Parallelschalten entsteht ein schwingfähiges System in dem die Ladungen zwischen den Kondensatoren hin und her schwingen. Die dabei auftretenden Verluste sind verantwortlich für die Abnahme der Energie.

d) Für die Kapazität einer Kugel gilt:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Nun soll die Kapazität $C = 1F$ betragen. Somit müsste die Kugel einen Radius von

$$R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1F}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}\frac{F}{m}} \approx 8.98 \cdot 10^9 m$$

Eine solche Kugel wäre 1410 mal größer als die Erde oder knapp 13 mal größer als die Sonne.

e) Für das elektrische Feld auf der Oberfläche einer Kugel gilt:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Für das elektrische Potential auf der Kugeloberfläche gilt:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Daraus folgt für die elektrische Feldstärke

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R\phi}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\phi}{R}$$

Für eine Kugel mit dem Radius $R = 10cm$ und dem Potential $\phi = 100V$ ist

$$E = \frac{100V}{0.1m} = 1000\frac{V}{m}$$

Für eine Kugel mit dem Radius $R = 10\mu m$ und dem Potential $\phi = 100V$ ist

$$E = \frac{100V}{10^{-5}m} = 10^7\frac{V}{m}$$

Aufgabe 2: Kraft auf einen Dipol

a) Die Kraft auf einen Dipol mit dem Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{b}$ soll untersucht werden. Es sei $\vec{r}$ der Ortsvektor des Dioplmoments. Nun wirken auf den Dipolm zwei Kräfte durch das elektische Feld:

$$\vec{F}_1 = q\vec{E}(\vec{r}) \qquad \vec{F}_2 = -q\vec{E}(\vec{r}+\vec{b})$$

Die Gesamtkraft auf das Dipolmoment ist

$$\begin{aligned} F_{ges} &= F_1 + F_2 = q\left(\vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}+\vec{b})\right) \\ &= qb\frac{d\vec{E}}{d\vec{r}} = \vec{p}\vec{\nabla}\vec{E} \end{aligned}$$

Auf den Dipol wirken die Drehmomente um den Ladungsschwerpunkt

$$M_1 = \frac{\vec{b}}{2} \times -q\left(\vec{E}\left(\vec{r}\right)\right) \qquad M_2 = -\frac{\vec{b}}{2} \times q\left(\vec{E}\left(\vec{r}+\vec{b}\right)\right)$$

Nun ist das Drehmoment auf den Dipol mit $\vec{E}(\vec{r}) \approx \vec{E}(\vec{r}+\vec{b})$

$$M = M_1 + M_2 = \frac{\vec{b}}{2} \times q\left(\vec{E}\left(\vec{r}+b\right) + \vec{E}\left(\vec{r}\right)\right) \approx \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$$

b) Betrachtet man nun einen Dipol im homogenen Feld mit

$$\vec{E} = E\vec{e}_x$$

so verschwindet $\nabla\vec{E}$ und es wirkt keine Kraft auf den Dipol. Es ist

$$\vec{F} = 0$$

Für das Drehmoment auf den Diopl gilt nun

$$M = \vec{p} \times E\vec{e}_x = pE(\hat{\vec{p}} \times \vec{e}_z) = pE\sin(\alpha)$$

Das Drehmoment verschwindet also, wenn das Dipolmoment parallel zum elektrischen Feld ist. Das Teilchen wird sich immer parallel zum Feld ausrichten.

Thomas Lorenz Arne Thoma - Gruppe 8

Übungsblatt 7 IK2

Aufgabe 1: Bildladungen

a) Für die Kraft auf die Ladung q_1 sind zwei Kräfte zu betrachten. Zum einen die Kraft, durch die Induzierte Ladung auf der Platte durch q_1 zum anderen alle Kräfte durch die Ladung q_2.

$$F_{Ges} = F_{(q_1)} + F_{(q_2)}$$

Die Kraft auf das Teilchen durch induzierte Ladungen auf der Platte ist gegeben durch:

$$F_{(q_1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1^2}{A^2}$$

Für die Errechung der Kraft durch q_2 wird das Feld der Ladung und Spiegelladung betrachtet. Bei der Ladung q_1 ergibt es sich zu:

$$E = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{L^2} - \frac{1}{d(q_1, -q_2)^2} \right]$$

Für den Abstand zwischen q_1 und $-q_2$ ergibt sich geometrisch:

$$d(q_1, -q_2)^2 = L^2 + (2B)^2 - 2L2B\cos(\alpha + \pi/2)$$

Wobei α definiert ist über:

$$\sin(\alpha) = \frac{A - B}{L}$$

Nun gilt weiter

$$d(q_1, -q_2)^2 = L^2 + (2B)^2 - 4B(B - A) = L^2 + 4AB$$

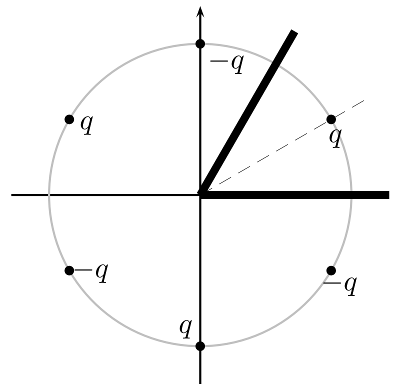
So gilt für das E-Feld bei Ladung q_1

$$E = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L^2 + 4AB} \right] = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-4AB}{L^4 + 4L^2AB}$$

Die Gesamtkraft auf q_1 ist somit gegeben durch:

$$F_{Ges} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{A^2} - q_1 q_2 \frac{4AB}{L^4 + 4L^2AB} \right]$$

b) Alle Spiegelladungen von q befinden sich auf einem Kreis um 0 mit dem Radius d. Insgesamt gibt es fünf Spiegelladungen zu q



Für die Punktladungen in kartesischen Koordinaten gilt demnach:

$$-q \text{ bei } (0, b) \qquad +q \text{ bei } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{b}{2}\right) \qquad -q \text{ bei } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}b, -\frac{b}{2}\right)$$

$$q \text{ bei } (0, -b) \qquad -q \text{ bei } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b, -\frac{b}{2}\right)$$

Aufgabe 2: Influenz im homogenen Feld

a) Das elektische Feld sei beschrieben Durch:

$$E = E_0 \vec{e}_x$$

Nun gilt für das Potential des Feldes und das Potential eines Dipols im Ursprung

$$\phi_D(r) = \frac{1}{4\pi_0} \frac{p \cos(\gamma)}{r^2} \qquad \phi_0(r) = -E_0 r \cos(\gamma)$$

Wobei γ den Winkel zwischen Ortsvektor und $\vec{e}_x$ darstellt. Nun soll das Potential an der Kugeloberfläche stetig sein, so dass

$$\partial_\gamma \phi(R) = \partial_\gamma \phi_D(R) + \partial_\gamma \phi_0(R) = -\left(\frac{1}{4\pi_0} \frac{p}{R^2} - ER\right) \sin(\gamma) = 0$$

Das ist nur erfüllt, wenn

$$\frac{p}{R^2} - ER = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 4\pi_0 E R^3$$

So ergibt sich für das Potential

$$\phi(r) = \frac{ER^3}{r^2} \cos(\gamma) + Er\cos(\gamma) = -E\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos(\gamma)$$

b) Die Ladungsdichte σ ist gegeben durch:

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R} = -\varepsilon_0 E(1+2\frac{R^3}{R^3})\cos(\gamma) = 3\varepsilon_0 E\cos(\gamma)$$

c) Die Ladung einer Kugelhälfte lässt sich nun Berechnen als

$$Q_\pm = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\pi} \sigma R^2 \sin(\gamma)\, d\gamma, d\theta = 3\varepsilon_0 ER^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(\gamma)\sin(\gamma) d\gamma \int_0^{\pi} d\theta = -\frac{3}{4}ER^2$$

d) Für den Dipol der Ladung der Kugelhälften muss also gelten:

$$p = Qd \Rightarrow d = \frac{4ER^3}{3R^2} = \frac{4}{3}R$$

Die Ladungen müssten also einen Abstand von $4/3R$ haben und somit an den Punkten

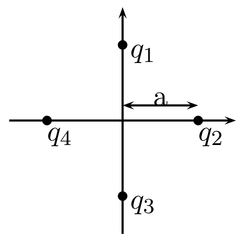
$$Q_+ \text{ bei } (-2R/3, 0, 0) \qquad Q_- \text{ bei } (2R/3, 0, 0)$$

sitzen.

Thomas Lorenz Arne Thoma - Gruppe 8

Übungsblatt 8 IK2

Aufgabe 1: Dipol/Quadrupolmomente Es seien viel Ladungen q_1, q_2, q_3 und q_4 wie folgt angeodnet.



Die Ladungsverteilung soll neutral sein. Das Monopolmoment verschwindet also.

$$q_m = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$$

a) Das Dipolmoment der Ladungsverteilung ist gegeben durch die Summe der Dipolmomente

$$q_d = q_1 \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + q_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} + q_4 \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Somit muss für die Ladungen gelten:

$$q_1 = q_3 \quad q_2 = q_4 \stackrel{q_m=0}{\Rightarrow} q_1 = -q_2 = q_3 = -q_4$$

b) Das Quarupolmoment der Verteilung ist durch eine Matrix definiert. Für die Einträge der Matrix (Tensor) $Q_{i,j}$ gilt:

$$\begin{aligned}
Q_{1,1} &= q_1(0 - a^2) + q_2(3a^2 - a^2) + q_3(-a^2) + q_4(3a^2 - a^2) \\
&= -a^2 q_1 + 2a^2 q_2 - a^2 q_3 + 2a^2 q_4 \\
Q_{2,2} &= q_1(3a^2 - a^2) + q_2(0 - a^2) + q_3(3a^2 - a^2) + q_4(0 - a^2) \\
&= 2a^2 q_1 - a^2 q_2 + 2a^2 q_3 - a^2 q_4 \\
Q_{1,2} &= Q_{2,1} = 3 \sum_{k=1}^{3} q_k x_k y_k = 0
\end{aligned}$$

Damit das Quadrupolmoment verschwindet muss also

$$Q_{1,1} = 0 \quad \text{und} \quad Q_{2,2} = 0$$

Damit folgt:

$$\left.\begin{aligned} q_1 + q_3 = 0 \\ q_2 + q_4 = 0 \end{aligned}\right\} \stackrel{q_m=0}{\Rightarrow} \begin{cases} q_1 = q_2 = -q_3 = -q_4 \\ q_1 = -q_2 = -q_3 = q_4 \end{cases}$$

Unter der Vorraussetzung einer neutralen Ladungsverteilung kann also bei der gegeben Anordnung immer nur entweder das Dipolmoment oder das Quadrupolmomnet verschwinden. Damit beide Momente verschwinden wäre die einzige Möglichkeit durch $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$ gegeben.

Aufgabe 2: Bildladungen im Dielektrikum Das betrachtete Problem ist rotationssymetrisch um die z-Achse, so dass sich Zilinderkoordninaten zur Lösung anbieten. Es bezeichne der Index 1 den Halbraum mit dem Dielektrikum mit ε_1. Nun gilt für das Potential in Zilinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(r,z) =& \frac{1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+(d-z)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+(d+z)^2}}\right] \\
\varphi_2(r,z) =& \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\frac{q''}{\sqrt{r^2+(d-z)^2}}
\end{aligned}$$

An der Übergangsfläche der Medien ($z = 0$) gilt nun:

$$E_{1\|} = E_{2\|} \qquad D_{1\perp} = D_{2\perp}$$

a) Für die Tangentialkomponente der Feldstärke gilt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{z=0} = -E_{1\|} &= -E_{2\|} = \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{z=0} \\
\frac{1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+(d-z)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+(d+z)^2}}\right]_{z=0} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{q''}{\sqrt{r^2+(d-z)^2}}\Bigg|_{z=0} \\
-\frac{r}{\varepsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2}^3} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+d^2}^3}\right] &= -\frac{r}{\varepsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{r^2+d^2}^3} \\
q + q' &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}q''
\end{aligned}$$

Für die Normalkomponente der Feldstärke gilt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0\varepsilon_1\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = -\varepsilon_0\varepsilon_1 E_{1\perp} = -D_{1\perp} &= -D_{2\perp} = -\varepsilon_0\varepsilon_2 E_{2\|} = \varepsilon_0\varepsilon_2\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right|_{z=0} \\
\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+(d-z)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+(d+z)^2}}\right]_{z=0} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{q''}{\sqrt{r^2+(d-z)^2}}\Bigg|_{z=0} \\
\frac{qd}{\sqrt{r^2+d^2}^3} - \frac{q'd}{\sqrt{r^2+d^2}^3} &= \frac{q''d}{\sqrt{r^2+d^2}^3} \\
q - q' = q''
\end{aligned}$$

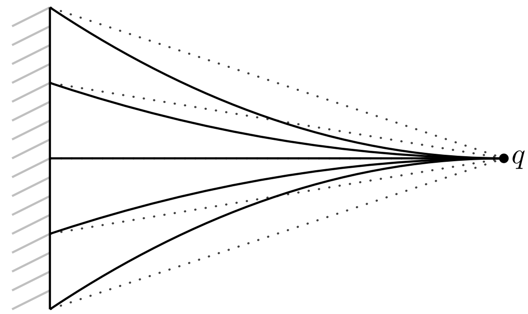
Nun ist

$$q' = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q$$

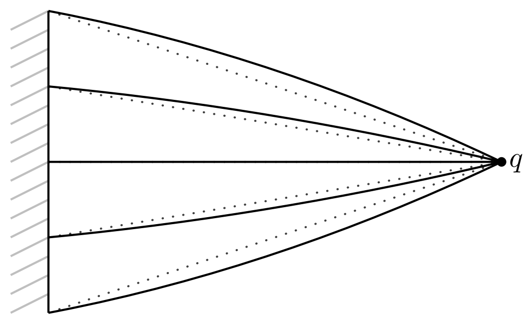
b) Für das Potential im Halbraum 1 gilt also:

$$\varphi(r,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(d-z)^2}} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{r^2+(d+z)^2}}\right]$$

Im Falle von $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ergibt sich für den Feldlinienverlauf. Die Richtung der Feldlinien hängt von der Ladung q ab. Die gestrichelten Linien geben den Feldverlauf für ein unendlich aúsgedehntes Dielektrikum mit ε_1 an.



Im Falle von $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ergibt sich für den Feldlinienverlauf.Die Richtung der Feldlinien hängt von der Ladung q ab.



c) Für die „Bildladung“ q'' ergibt sich nach den Ergebnissen des Teils a):

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$

d) Das Potential im zweiten Halbraum ergibt sich so zu:

$$\varphi_2(r,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (d-z)^2}} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (d-z)^2}}$$

e) Die Oberflächenladungsdichte σ_p ist der Grund für den Sprung der Senkrechten Komponente des Elektischen Feldes. Es gilt:

$$\sigma_p = E_{1\perp}|_{z=0} - E_{2\perp}|_{z=0} = -\left(\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{z=0} - \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_{z=0} \right)$$

Nun ist :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}^3} \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sqrt{r^2 + d^2}^3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sqrt{r^2 + d^2}^3} \end{aligned}$$

Es ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
\sigma_p(r) &= \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{r^2+d^2}^3} \\
&= \frac{q}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}^3}
\end{aligned}$$

f) Die potentielle Energie einer Ladung q im ersten Halbraum ergibt sich aus dem Potential der Punktladungen q und q'. Es ist:

$$E_{pot}(d) = q\phi(d) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{1}{2d}$$

Die Größe der Punktladung q' ist unabhängig vom d, so dass gilt

$$E_{pot}(d) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \cdot \frac{q^2}{d}$$

Für das Elektron gilt also

$$E_{pot} = \frac{1}{8\pi 8.85 \cdot 10^{-12}\frac{C}{Vm}} \cdot \frac{0.058}{2.058}\frac{(1.602\cdot 10^{-19}C)^2}{10^{-8}m} \approx 3.25 \cdot 10^{-22} J \approx 2.02 meV$$

Übungsblatt 9 IK2

Aufgabe 1: Wiederstand einer Kreisringscheibe

Beim Anlegen der Spannung U zwischen die innere und äußere Mantelfläche fließt im Bereich $R_1 < r < R_2$ ein Strom. Für den Strom durch ein konzentriche Fläche innerhalb der Kreisringscheibe gilt:

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{f}$$

Nun gilt nach dem ohmschen Gesetz für die Stromdichte $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Damit ist:

$$I = \sigma \int \vec{E} d\vec{f}$$

Mit $d\vec{f} = r\, d\varphi\, dh \vec{e}_r$ ist das Integral berechnen zu

$$I = \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^d dh\, r \vec{E} \vec{e}_r = 2\pi d \vec{E} \sigma r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{e}_r = \frac{I}{2\pi d \sigma r}$$

Nun ergibt sich mit aus $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = \vec{E} \cdot \vec{e}_r \Rightarrow -d\phi = \frac{I}{2\pi d \sigma r} dr$$

Für die Spannung U gilt nun:

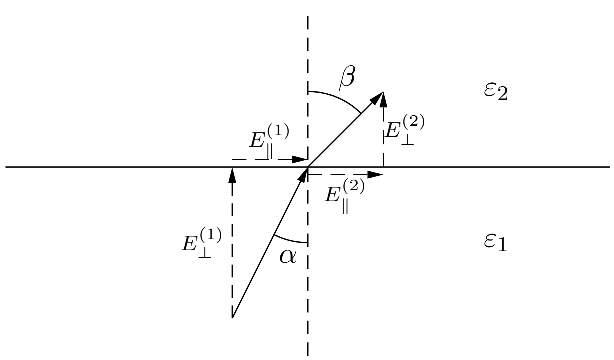
$$\begin{aligned} U &= \phi_{r_1} - \phi_{r_2} = \int_{r_1}^{r_2} -d\phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{I}{2\pi d \sigma r} dr \\ &= \frac{I}{2\pi d \sigma} (\ln r_2 - \ln r_1) \end{aligned}$$

Der Wiederstand zwischen den Mantelflächen ergibt sich nun als:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{I}{2\pi d \sigma I} (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}{2\pi d \sigma}$$

Aufgabe 2: Brechungsgesetz der Elektrostatik

Betrachtet man die Grenzfläche zweier homogenen Dielektrika mit unterschiedlicher Permittivitätszahl ε_1 bzw. ε_2 so wird das E-Feld bzw. D-Feld an der Grenzfläche gebrochen.



Für α und β gilt nun:

$$\tan(\alpha) = \frac{E_{\parallel}^{(1)}}{E_{\perp}^{(1)}} \qquad \tan(\beta) = \frac{E_{\parallel}^{(2)}}{E_{\perp}^{(2)}}$$

Für das elektrische Feld gilt an einer Grenzfläche ohne zusätzliche Ladungen:

$$E_{\parallel}^{(1)} = E_{\parallel}^{(2)} \qquad \varepsilon_0\varepsilon_1 E_{\perp}^{(1)} = D_{\perp}^{(1)} = D_{\perp}^{(2)} = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_{\perp}^{(2)}$$

Für das tangentiale elektrische Feld gilt demnach:

$$E_{\perp}^{(1)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{\perp}^{(2)}$$

Daraus ergibt sich für die Winkel α und β:

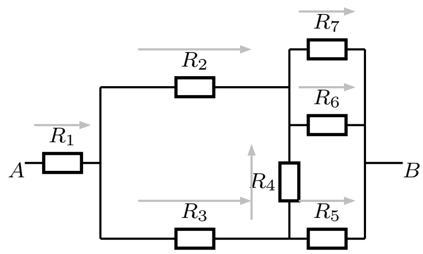
$$\frac{\tan(\alpha)}{\varepsilon_1} = \frac{\tan(\beta)}{\varepsilon_2}$$

Alternativ ergibt sich diese Brechungsgesetz für die Betrachtung der dielektrischen Verschiebung D. Hierbei sind die senkrechten Komponenten stetig, während die Tangentialkomponente um dem Betrag $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ springt. Durch Einsetzen folgt dann analog:

$$\frac{\varepsilon_1}{\tan(\alpha)} = \frac{\varepsilon_2}{\tan(\beta)}$$

Übungsblatt 10 IK2

Aufgabe 1: Widerstandsnetzwerk
Gegeben sei das Widerstandsnetzwerk mit den Widerständen $R_1, .., R_7$:



Die Ströme durch die Widerstände seien bezeichnet durch I_k als Strom durch den Wiederstand R_k, analog für die Spannung über einem Wiederstand. Der Wieerstandswert jedes einzelnen Widerstads sei R
Nun gilt nach der Knotenregel als Lineares Gleichungssystem für die Ströme:

$$M_I := \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nach der Maschenregel gilt für die Spannungen über den Wiederständen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem ohmschen Gesetz erhalten wir aus dem linearen Gleichungssystem für die Ströme durch Multiplizieren mit dem Wiederstandswert R drei weitere Bedingungen für die Spannungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ R & -R & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & -R & -R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & R & 0 & -R & -R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Löst man das so entstehende Gleichungssystem, so erhält man für die Spannungen an den Widerständen:

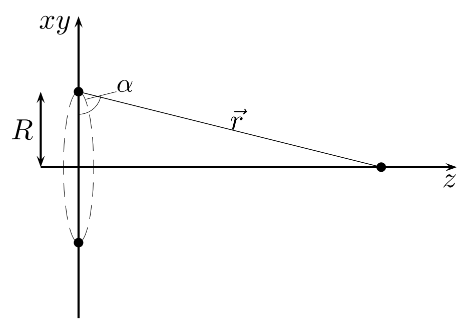
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{24} \\ \frac{7}{24} \\ 1/4 \\ 1/24 \\ \frac{5}{24} \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \cdot U$$

Betrachtet man nun die Spannung und Strom ($I_1 = I$) über dem ersten Wiederstand, so erhält man für den gesamten Widerstand:

$$R_{ges} = \frac{U}{I} = \frac{\frac{24}{13}U_1}{I} = \frac{24}{13}\frac{U_1}{I_1} = \frac{24}{13}R$$

Aufgabe 2: Helmholtz-Spulen

a) Eine Leiterschleife liege auf der xy-Ebene. Nun soll das vom Strom I durch die Leiterschleife erzeugte B-Feld auf der z-Achse berechnet werden.



Betrachtet man nun ein Leiterstück $d\vec{s}$ als Teilstück der Leiterschleife ergibt sich für das von dem Leitrstück erzeugte B-Feld:

$$d\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{|r|^3}$$

Die Komponentenweise Betrachtung des B-Feldes liefert, dass die auf der z-Achse senkrechte Komponente bei der Integration über die Leiterschleife verschwindet. Für die zur z-Achse senktrechte Komponente gilt nun:

$$dB_{\|} = \left| d\vec{B}_0 \right| \cos(\alpha)$$

Für den Betrag des Feldes gilt nun:

$$|dB| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{|\vec{r} \times d\vec{s}|}{r^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi r^3} \cdot \frac{R}{\cos(\alpha)} \, |d\vec{s}|$$

Das B-Feld an $(0,0,z)$ ergibt sich so zu:

$$B_{\|}(z) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi r^3} \cdot \oint R ds = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2r^3}$$

Nun gilt für $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ und $\vec{B}_0(z) = B_{\|}(z) \cdot \vec{e}_z$, so dass sich das B-Feld ergibt als:

$$\vec{B}_0(z) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2\sqrt{R^2 + z^2}^3} \cdot \vec{e}_z$$

b) Betrachtet man nun zwei Leiterschleifen mit dem Abstand von d, die jeweils in den Ebenen $z = \pm\frac{d}{2}$ liegen, ergibt sich das B-Feld auf der z-Achse durch Superpossition der einzelnen Felder:

$$\begin{aligned} B(z) &= \left(\vec{B}_0\left(z + \frac{b}{2}\right) + \vec{B}_0\left(z - \frac{b}{2}\right)\right)\vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{b}{2}\right)^2}^3} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{b}{2}\right)^2}^3}\right] \end{aligned}$$

c) Soll das B-Feld im Punkt $(0,0,0)$ möglichst homogen sein, so müssen die ersten ortsabhängigen Komponenten der Taylorentwicklung des B-Feldes verschwinden.
Der zweite Term der Taylorentwicklung verschwindet im Nullpunkt immer, also

$$\left.\frac{\partial B_z(z)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

Dies ist der Fall, weil das B-Feld ebenensymmetrisch zur Leiterschleife ist und somit die örtliche Änderung des B Feldes ebenfalls symmetrisch ist. Für zwei Leiterscheifen gilt auch für die örtliche Änderung des B-Feldes, so dass sich die B-Feldänderung im Ursprung gerade Kompensieren.
Soll der zweite ortsabhängige Term der Taylorentwicklung verschwinden, so muss

$$\left.\frac{\partial^2 B_z(z)}{\partial z^2}\right|_{z=0} \stackrel{!}{=} 0$$

Es muss:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{-3\left(z + \frac{b}{2}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{b}{2}\right)^2}^5} + \frac{-3\left(z - \frac{b}{2}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{b}{2}\right)^2}^5}\right]_{z=0} \\ &= \frac{-384\, I \mu_0 R^2 \left(R^2 - d^2\right)}{\left(4\,R^2 + d^2\right)^{7/2}} \\ \Rightarrow d &= R \end{aligned}$$

Wenn der Abstand der Helmhotz-Spulen ihrem Radius entspricht (d=R), wird dass Feld im Mittelpunkt der Spulen nahezu Homogen.

Thomas Lorenz Arne Thoma - Gruppe 8

Übungsblatt 11 IK2

Aufgabe 1: Der Hall-Effekt

a) Auf Ladungen, die durch den Leiter fließen, wirkt nach einer Ausgleichszeit keine Kraft, so dass die Ladungen den Leiter geradlinig durchqueren. Die Lorentzkraft wird also null.

$$q(\vec{E} + v \vec{\times} \vec{B}) = 0$$

Die Geschwindigkeit der Ladungen im Leiter hängt von der Stromdichte ab:

$$\vec{v} = \frac{1}{nq}\vec{j}$$

Da nun $\vec{j}$ senkrecht auf dem B Feld steht gilt für den Betrag des elektrischen Feldes:

$$E = -\frac{1}{nq}jB$$

Das Elektrische Feld ergibt sich aus der Hallspannung und der Breite b des Leiters durch $E = \frac{U_H}{b}$, so dass gilt:

$$U_H = -\frac{jb}{nq}B = \frac{1}{nq}\frac{I}{d}B$$

Oft wird die der materialabhängige Wert für Leiter als Hallkonstante $A_H = \frac{1}{nq}$ zusammengeffast.

$$U_H = -A_H\frac{I}{d}B$$

b) Für die empfindlichkeit der Hallsonde gilt:

$$S = -\frac{U_H}{B} = \frac{1}{nq} \cdot \frac{I}{d}$$

Im aktuellen Fall gilt

$$S = \frac{1}{10^{21}m^{-3} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}C} \cdot \frac{0.1A}{0.00015m} \approx 4.161\frac{V}{T}$$

Aufgabe 2: Poissonsgleichung

a) Für die Rotation des Vektorpotentials A gilt nach Defninition:

$$\mathrm{rot}(\vec{A}) = \vec{B}$$

Die Coulombeichung bedeutet, dass die Divergenz des Vektorpotentials verschwinden soll:

$$\mathrm{div}(\vec{A} = 0)$$

Bekannt aus dem Ampereschen Gesetz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \mu_r \vec{j}$$

Nun folgt für das Vektropotential A:

$$\begin{aligned}
\mu_0 \mu_r \vec{j} &= \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \\
&= \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{A})}_{=0} - (\vec{\nabla}\vec{\nabla}) \cdot \vec{A} \\
&= -\vec{\nabla}^2 A = -\Delta A
\end{aligned}$$

b) Es sei der Leiter senkrecht auf der xy-Ebene. Nun kann das Vektorpotential Komponentenweise berechnet werden. Mit $\vec{j} = j\vec{e}_z$ folgt für die Komponenten von $\vec{A}$:

$$A_x = 0 \quad A_y = 0 \quad \Delta A_z = -\mu_0 \mu_r j$$

Nun folgt aus der Gaußschen Satz für Integrale:

$$\int_V -\mu_0 \mu_r j \, dV = \int_V \mathrm{div}(\mathrm{grad}(A_z)) dv = \oint_{S(V)} \mathrm{grad}(A_z) d\vec{f}$$

Eine Transformation in Zilinderkoordinaten liefert:

$$\oint_{S(V)} \mathrm{grad}(A_z) d\vec{f} = \oint_{S(V)} (\partial_r A_z \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\varphi A_z \vec{e}_\varphi + \partial_z A_z \vec{e}_z) d\vec{f}$$

Wählen wir nun ein zilindrichers Volumen um den Leitermittelpunkt mit dem Radius r und der Höhe h erhält man für das Volumenintegral wenn $r < a$:

$$\int_V -\mu_0 \mu_r j \, dV = -\mu_0 \mu_r j \pi r^2 h$$

Das Flächenintegral ist, da die Deckflächen vernachlässigt werden können und somit $d\vec{f} = df \vec{e}_r$ ist:

$$\oint_{S(V)} \mathrm{grad}(A_z) d\vec{f} = \oint_{S(V)} \partial_r A_z \, df = 2\pi r h \partial_r A_z(r)$$

Somit ergibt sich für A_z:

$$\begin{aligned}
\oint_{S(V)} \mathrm{grad}(A_z) d\vec{f} &= \int_V -\mu_0 \mu_r j \, dV \\
\partial_r A_z(r) &= -\frac{1}{2} \mu_0 \mu_r j r \\
A_z(r) &= -\frac{1}{4} \mu_0 \mu_r j r^2
\end{aligned}$$

Für den Fall $r > a$ ergibt sich der Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
\oint_{S(V)} \mathrm{grad}(A_z) d\vec{f} &= \int_V -\mu_0 \mu_r j \, dV \\
2\pi r h \partial_r A_z(r) &= -\mu_0 \mu_r \underbrace{j \pi a^2}_{=I} h \\
\partial_r A_z(r) &= -\frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \\
A_z(r) &= -\frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)
\end{aligned}$$

Durch eine Wahl der Randbedingung $A_z(a) = 0$ ist A an der Leiteroberfläche stetig. Für die Vektorpotentialkomponente folgt dann mit $j = \frac{I}{\pi a^2}$:

$$A_z(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \mu_1 I}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & r < a \\ -\frac{\mu_0 \mu_2 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) & r \geq a \end{cases}$$

c) Betrachtet man die B-Feld komponenten in Zilinderkoordinaten, so ergibt sich aus $\mathrm{rot}(\vec{A}) = \vec{B}$ und $\vec{A} = (0, 0, A_z)$:

$$B_r = \frac{1}{r}\partial_\varphi A_z(r) = 0 \quad B_\varphi = -\partial_r A_z \quad B_z = 0$$

Betrachtet werden muss also nur die φ-Komponente des B-Feldes:

$$B_\varphi(r) = -\partial_r A_z(r)$$

Führt man nun die Differntation aus ergibt sich:

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \mu_1 I}{2\pi} \frac{r}{a^2} & r < a \\ \frac{\mu_0 \mu_2 I}{2\pi r} & r \geq a \end{cases}$$

Das H-Feld erbibt sich aus dem Zusammenhang $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ als:

$$H_\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\mu_1 I}{2\pi} \frac{r}{a^2} & r < a \\ \frac{\mu_2 I}{2\pi r} & r \geq a \end{cases}$$

Für das H und B-Feld sind die B_r und B_z bzw. H_r und H_z jeweils Null.