Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (schriftlich): Vektoren und Skalare

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und es gelte $a = |\vec{a}|, b = |\vec{b}|, c = |\vec{c}|$

(a)

(1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = -7$

(3) $a + |\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{50} + \sqrt{38}$

(4) $|\vec{a} + \vec{b}| + c = \sqrt{90} + \sqrt{8}$

(5) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{74}$

(b)

(1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = -7$

(2) $a(b + c) = 70$

(3) $a \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \sqrt{50} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

(4) $\vec{a}(b + c) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} (\sqrt{50} + \sqrt{8})$

(5) $\vec{a}|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{50} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(c)

(1) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = -\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}$

(2) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \begin{pmatrix} -10 \\ \text{1ß} \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $(ab)\vec{c} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $\vec{a}(bc) = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$

(5) $abc = 100\sqrt{2}$

(d)

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ \alpha \end{pmatrix}$ *und* $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

sind orthogonal zueinander

wenn deren Skalarprodukt verschwindet:

$\vec{d} \cdot \vec{e} = -3 - 12 - 3\alpha = 0$

$\rightarrow \alpha = -5$

Aufgabe 2 (schriftlich): Ein Dreieck

$A = (1, -1, 1), B = (0, 0, 4), C = (2, 3, -5)$

Längen der Innenseiten:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{53}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{94}$$

Innenwinkel des Dreiecks:

Allgemeine Regel : $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}\cdot|\vec{b}|}$

Winkel bei B:

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\mid\vec{a}\mid\cdot\mid\vec{c}\mid} = \rightarrow \beta = ^\circ 36$$

Winkel bei A:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{\mid\vec{c}\mid\cdot\mid\vec{b}\mid} = \rightarrow \alpha = ^\circ ??$$

Aufgabe 3 (schriftlich): Vektoraddition

Obiger Skizze sind folgende Beziehungen zu entnehmen: $\vec{n} = \vec{w}$, d.h. die Komponente der Geschwindigkeit in Richtung Nordwest sind gleich groß

$n^2 + w^2 = v^2$ (mit $w = n$)

$$w = \sqrt{\frac{v^2}{2}} = \sqrt{\frac{(850)^2(\frac{km}{h})^2}{2}} \approx 6 \cdot 10^2 \frac{km}{h}$$

Ohne den Wind wäre die Geschwindigkeit des Flugzeugs in Richtung Westen:

$$w = 600\frac{km}{h} + 200\frac{km}{h} = 800\frac{km}{h}$$

Für die Gesamtgeschwindigkeit würde sich damit ergeben:

$$v_{neu} = \sqrt{(600\frac{km}{h})^2 + (800\frac{km}{h})^2} = 1000\frac{km}{h}$$

Der Schnittwinkel der Bahn des Flugzeugs mit der Ost-West-Achse wäre nun:

$$\cos\beta = \frac{800\frac{km}{h}}{1000\frac{km}{h}} = \frac{4}{5} \rightarrow \alpha \approx ^\circ 76{,}38$$

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (schriftlich): Vektorprodukt

(a)

(1)

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= \sum_{jkl} a_i b_j c_k \vec{e}_i(\vec{e}_j\times\vec{e}_k) \\
&= \sum_{ijk} a_i b_j c_k \epsilon_{ijk}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) &= \sum_{jkl} a_i b_j c_k \vec{e}_j(\vec{e}_k\times\vec{e}_i) \\
&= \sum_{ijk} a_i b_j c_k \epsilon_{jki} \qquad \mid \epsilon_{jki}=\epsilon_{ijk} \\
&= \sum_{ijk} a_i b_j c_k \epsilon_{ijk}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
-\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}) &= -\sum_{kji} a_i b_j c_k \vec{e}_k(\vec{e}_j\times\vec{e}_i) \\
&= -(\sum_{kji} a_i b_j c_k \epsilon_{kji}) \\
&= -(\sum_{kji} a_i b_j c_k(-\epsilon_{ijk})) \\
&= \sum_{ijk} a_i b_j c_k \epsilon_{ijk}
\end{aligned}$$

(b)

Zu zeigen: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$
Entwicklungssatz: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$
Beweis durch Einsetzten:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \quad \times &\quad (\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) \\
= &\quad (\vec{a}\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\vec{b})\vec{c}+(\vec{b}\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\vec{a})\vec{b} \\
= &\quad 0
\end{aligned}$$

(c)

Skizze

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\overrightarrow{PR}\right| \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{pr}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\overrightarrow{PR}\right|} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{41}\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{451}}$$

$\rightarrow \alpha \approx 76,34^\circ$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{451} \cdot \sin 76,34^\circ = 10,32\text{FE}$

Aufgabe 2 (schriftlich): Bahnkurve

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= -R\sin(wt)\vec{e}_x w + R\cos(wt)w\vec{e}_y + c\cdot\vec{e}_z \\
|\dot{\vec{r}}(t)| &= \sqrt{(-R\sin(wt)w)^2 + (R\cos(wt)w)^2 + c^2} \\
&= \sqrt{R^2w^2(\sin(wt)^2 + \cos(wt)^2) + c^2} \\
&= \sqrt{R^2w^2 + c^2} \\
s(t) &= \int_o^t \sqrt{R^2w^2 + c^2}dt` = \sqrt{R^2w^2 + c^2}t \\
t(s) &= \frac{s}{\sqrt{R^2w^2 + c^2}} \\
\vec{r}(s) &= \left(R\cos\left(\frac{ws}{\sqrt{R^2w^2+c^2}}\right), R\sin\left(\frac{ws}{\sqrt{R^2w^2+c^2}}\right), \frac{cs}{\sqrt{R^2w^2+c^2}}\right)
\end{aligned}$$

(b)

Skizze:

Zum Zeitpunkt $t_w$hat der Geschwindigkeitsvektor v(t) den Wert Null, in x-Richtung erreicht er sein Maximum $\rightarrow \sin() = 1$
In z-Richtung hat der Vektor von v(t) dauerhaft die Länge c ,also auch zum Zeitpunkt t_w.
Somit ist der Vektor beim Durchstoß durch die x-z-Ebene:

$v(t_w) = \begin{pmatrix} 0 \\ RW \\ c \end{pmatrix}$ und somit ist der gesuchte Winkel:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ RW \\ c \end{pmatrix} \cdot}{|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}| \cdot |\begin{pmatrix} 0 \\ RW \\ c \end{pmatrix}|} \\
&= \frac{RW}{\sqrt{R^2w^2 + c^2}} \\
\rightarrow \alpha &= \arccos\frac{RW}{\sqrt{R^2w^2 + c^2}}
\end{aligned}$$

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (schriftlich): Wurfparabel und Steine

(a)
Die Formel für die Bahnkurve des schiefen Wurfs lautet :

$z(x) = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v^2\cos^2\alpha}x^2$ (1)

Wir setzen ein in (1):

$z(1000m) = 10m$ mit $\alpha = 60°$ und erhalten die Geschwindigkeit :

$$\begin{aligned}
10m &= 1000m \cdot \tan 60° - \frac{1}{2}\frac{9,81\frac{m}{s^2}}{v^2 \cdot \cos^2 60°} \cdot (1000m)^2 \\
0,01 &= \tan 60° - \frac{9,81\frac{m}{s^2}}{2v^2\cos^2 60°} \cdot 1000m \\
\tan 60° - 0,01 &= \frac{9,81\frac{m}{s^2}}{2v^2 \cdot 0,25} \cdot 1000m \\
v^2 &= \frac{9,81\frac{m}{s^2} \cdot 1000m}{2(\tan 60° - 0,01) \cdot 0,25} \\
v &= \sqrt{\frac{9810\frac{m}{s^2} \cdot 2}{\tan 60° - 0,01}} \\
v &\approx \pm 1,1 \cdot 10^2 \frac{m}{s}
\end{aligned}$$

Der negative Wert entfällt,da es sich um ein praktisches Beispiel handelt und nur der Betrag von v als Lösung gilt $\rightarrow v = 1,1 \cdot 10^2\frac{m}{s}$

Die Formel für die Wurfweite lautet: $x_W = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (2)
Bei $\alpha = 45°$ erhält man die beste Weite, da dann der sinus maximal wird.
$\rightarrow$ Die gesuchte Geschwindigkeit erhält man durch einsetzten in (2) mit $\alpha = 45°$:

$$\begin{aligned}
1000m &= \frac{v_o^2}{9,81\frac{m}{s^2}\sin 90°} \\
v_0^2 &= 9810\frac{m^2}{s^2} \\
v_0 &= \sqrt{9810}\frac{m}{s} \\
&\approx \pm 99\frac{m}{s}
\end{aligned}$$

Der Winkel,für den das Ziel noch getroffen wird(mit $v_0 = 110\ m$ aus voriger Aufgabe):

$$\begin{aligned} 1000m &= \frac{(110\frac{m}{s})^2}{9,81\frac{m}{s^2}} \sin\alpha \\ \sin\alpha &= \frac{9810}{12100} \\ \rightarrow \alpha &\approx 54^\circ \end{aligned}$$

(b)

Für den senkrechten Wurf gilt:
$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z + v_0t\vec{e}_z$
$\vec{z}(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt$
Skizze:

Die Steine treffen sich bei:

$$\begin{aligned} \vec{z}(t) &= \vec{z}(t - \triangle t) \\ v_0t - \frac{1}{2}gt^2 &= v_0(t + \triangle t) - 12g(t + \triangle t)^2 \\ 0 &= v_0 \triangle t - gt \triangle t - \frac{1}{2}g \triangle t^2 \\ t &= \frac{v_0}{g} + \frac{\triangle t}{2} = t_s \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit entspricht der Ableitung von z(t) nach t:
$\dot{z}(t) = v_0 - gt$
$\dot{z}(t_s) = v_0 - g(\frac{v_0}{g} + \frac{\triangle t}{2}) = \frac{g\cdot\triangle t}{2}$
Der Betrag der Geschwindigkeit ist für beide Körper gleich groß,unabhängig der Wahl von $\triangle t$.Dies kann man sich veranschaulichen an den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$,deren Betrag immer gleich groß ist(bei t_s).

Aufgabe 2 (schriftlich): Krummlinige Bewegung

(a)

mit $\overrightarrow{OP} = \vec{v}t, \quad \overrightarrow{MP} = \vec{e}_s s, \quad \vec{e}_s = (-\sin\phi, \cos\phi)$ *siehe Skizze*

$\rightarrow \vec{r} = \vec{v}t - \vec{e}_s s$

(b)

$\vec{r} = (ssin(\phi), vt - s\cos(\phi))$

$\dot{\vec{r}} = (\dot{s}\sin(\phi) + s\cos(\phi)\dot{\phi}, v + s\sin(\phi)\dot{\phi} - \dot{s}\cos\phi)$

$mit \mid \vec{u} \mid = 2 \mid \vec{v} \mid$

$\vec{u} = \dot{\vec{r}} = (-2v\sin(\phi), 2v\cos(\phi))$

$\rightarrow \dot{x} = -2v\sin\phi = \dot{s}\sin\phi + s\cos(\phi)\dot{\phi}$

$\rightarrow \dot{y} = 2v\cos\phi = v + s\sin(\phi)\dot{\phi} - \dot{s}\cos\phi$

somit gilt fuer $\dot{x}$:

$$\begin{aligned} s\cos(\phi)\dot{\phi} &= -2v\sin\phi - \dot{s}\sin\phi \\ \Rightarrow \dot{\phi} &= \frac{-2v\sin\phi - \dot{s}\sin\phi}{s\cos\phi} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & in\ \dot{y}: \\ 2v\cos\phi &= v + s\sin(\phi)\frac{-2v\sin(\phi) - \dot{s}\sin(\phi)}{s\cos(\phi)} - \dot{s}\cos\phi \\ 2v\cos(\phi) &= v + \frac{-2v\sin^2\phi - \dot{s}\sin^2\phi - \dot{s}\cos^2\phi}{\cos\phi} \\ 2v\cos(\phi) &= v + \frac{-2v\sin^2\phi - \dot{s}}{\cos\phi} \\ 2v\cos(\phi) &= v - 2v\frac{\sin^2(\phi)}{\cos(\phi)} - \frac{\dot{s}}{\cos\phi} \\ 2v\cos(\phi) - v + 2v\frac{1-\cos^2(\phi)}{\cos(\phi)} &= -\frac{\dot{s}}{\cos\phi} \\ -\dot{s}\frac{1}{\cos(\phi)} &= 2v\cos(\phi) - v + \frac{2v}{\cos(\phi)} - 2v\cos(\phi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{s} = -2v + v\cos(\phi) = v(\cos(\phi) - 2) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} & (2)\ in\ (1)\ einsetzen: \\ \dot{\phi} &= \frac{-2v\sin(\phi) - v(\cos(\phi) - 2)\sin(\phi)}{s\cos(\phi)} \\ &= \frac{-2v\sin\phi - v\cos\phi\sin\phi + 2v\sin\phi}{s\cos\phi} \\ \dot{\phi} &= -\frac{v}{s}\sin(\phi) \end{aligned} \tag{3}$$

Somit erhält man die gewünschte,von $\dot{s}$ unabhängige Form

(c)

Mit

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{ds}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{ds}{d\phi}\cdot\dot{\phi} && (4)\\ \dot{\phi} &= -\frac{v}{s}\sin(\phi) && (5)\\ \dot{s} &= v(\cos(\phi)-2) \quad (03) && (6) \end{aligned}$$

(5) in (4) :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -\frac{ds}{s}\frac{v\sin(\phi)}{d\phi}\\ \frac{ds}{s} &= \frac{-\dot{s}}{v\sin(\phi)}d\phi\\ mit\ (6):\quad \frac{ds}{s} &= \frac{-v(\cos(\phi)-2)}{v\sin(\phi)}d\phi\\ \frac{ds}{s} &= -\left(\frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}-\frac{2}{\sin(\phi)}\right)d\phi\\ \Rightarrow \int_{s_0}^{s}\frac{ds}{s} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\phi}\left(\frac{2}{\sin(\phi)}-\frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}\right)d\phi\\ \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) &= \left[2\ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)-\ln\sin(\phi)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\phi}\\ \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) &= \underbrace{-s\ln(\tan\frac{\pi}{4})}_{=0}+\underbrace{\ln(\sin\frac{\pi}{2})}_{=0}+(2\ln\tan\frac{\phi}{2})-\ln\sin(\phi)\\ &= \ln\left(\frac{\tan^2\frac{\phi}{2}}{\sin(\phi)}\right)\\ &= \ln\frac{\frac{\sin^2\phi}{(1+\cos(\phi))^2}}{\sin(\phi)}\\ \ln\frac{s}{s_0} &= \ln\left(\frac{\sin(\phi)}{(1+\cos(\phi))^2}\right)\\ \frac{s}{s_0} &= \frac{\sin(\phi)}{(1+\cos(\phi))^2} \end{aligned}$$

$$s(\phi) = \frac{s_0\sin(\phi)}{(1+\cos\phi)^2} \qquad (7)$$

(d)

(7) in (3) einsetzten:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \frac{d\phi}{dt} \\
&= -\frac{v}{s}\sin(\phi) \\
d\phi &= -\frac{v(1+\cos(\phi))^2}{s_0\sin(\phi)}\sin(\phi)dt \\
dt &= -\frac{s_0}{v(1+\cos(\phi))^2}d\phi \\
T &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{s_0}{v(1+\cos(\phi))^2}d\phi \\
T &= -\frac{s_0}{v}[\frac{1}{2}\tan(\frac{\phi}{2})+\frac{1}{6}\tan^3(\frac{\phi}{2})]_{\frac{\pi}{2}}^{0} \\
T &= -\frac{s_0}{v}\left(\frac{1}{2}\tan(0)+\frac{1}{6}\tan^3(0)-(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\tan^3(\frac{\pi}{4}))\right) \\
T &= -\frac{s_0}{v}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) \\
T &= \frac{2}{3}\frac{s_0}{v}
\end{aligned}$$

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (schriftlich): Massen am Seil

(a)
Bestimmen die die Beschleunigung $\ddot{x}_1$ und $\ddot{x}_2$:
Die Beschleunigung ist gegeben durch $\ddot{x} = \frac{F}{m}$
Die beschleunigende Kraft ist $(m_2 - m_1)$,da der Massenunterschied die Kraft bewirkt.
Die zu beschleunigende Masse ist $m_1 + m_2$,da beide Gewichte beschleunigt werden müssen.

Also

$$\ddot{x}_2 = \frac{F}{m} = \frac{(m_2 - m_1) \cdot g}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

Da die Richtungen der Beschleunigungen entgegengesetzt sind,gilt $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$
Für Gleichung **??** gilt $\ddot{x}_2 > 0$ für $m_2 > m_1$

Skizze:

Sei $m_2 > m_1$,so gilt für die linke Seilkraft

$$T_l = -(m_1 \cdot g) + (m_1 \cdot a) \tag{2}$$

Das (-) rührt von der Definition unserer x_1-Achse

Mit Gleichung **??**:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= -(m_1 \cdot g + m_1 \frac{(m_2 - m_1) \cdot g}{m_1 + m_2}) \\ &= -(\frac{m_1 \cdot g(m_1 + m_2) + m_1 \cdot g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}) \\ &= -\frac{\mathbf{2m_1m_2}}{\mathbf{m_1 + m_2}} \qquad (3)\end{aligned}$$

Da T an m_1 und T an m_2 gleich sein müssen,hier T an m_2 (zur Probe):

$$\begin{aligned}T_r &= -(m_2 g - m_2 a) \\ &\ldots \\ &= \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\end{aligned}$$

(b)

Wird das gesamte System A konstant vertikal beschleunigt,so entspricht das einer Änderung von g um den Wert a (innerhalb des Systems).
D.h. $g_{neu} = g_{alt} - a$,da wir die x-Achse nach unten als positiv definiert haben(s.Aufgabenstellung)

Somit ist

$$\ddot{x} = \frac{(m_2 - m_1) \cdot (g_{alt} - a)}{m_1 + m_2} \qquad (4)$$

und

$$T = -\frac{2m_1m_2(g_{alt} - a)}{m_1 + m_2} \qquad (5)$$

Stürzt der Aufzug, d.h. das System ab,so ennspricht das einer Änderung von $a \approx 9,81\frac{m}{s^2} = g$
Also ist $\ddot{x} = \frac{(m_2 - m_1)(g - g)}{m_1 + m_2} = 0$
→ Kräfte werden Null (innerhalb des Systems).
Dies gilt natürlich nur,wenn sämtliche Reibungseffekte vernachlässigt werden,sonst würde z.B. die Umlenkrolle „langsamer fallen“ als m_1 und / oder m_2

Aufgabe 2 (schriftlich): Reibung

(a)
gegeben:
$F_R(v_0) = -(\alpha + \beta v^2)$
$F = ma = m\frac{dv}{dt}$

Die Abbremskraft des Zuges ist gleich der Reibung durch m:

$$
\begin{aligned}
F_G &= F_R(v) \\
m\frac{dv}{dt} &= -(\alpha + \beta v^2) \\
\frac{dv}{dt}\frac{m}{\beta} &= -(\frac{\alpha}{\beta} + v^2) \\
\frac{mdv}{\beta(\frac{\alpha}{\beta} + v^2)} &= -dt \\
\frac{m}{\beta}\int_{v_0}^{0} \frac{dv}{(\frac{\alpha}{\beta} + v^2)} &= -\int_0^{t_s} 1dt \\
\frac{m}{\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\right) &= -(1 \cdot 0 - t_s) = t_s \\
t_s &= \frac{m}{\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)
\end{aligned}
$$

Für $v_0 \to \infty$:
$\lim_{v_0 \to \infty} \frac{m}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\right) = \frac{m}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\frac{\pi}{2} = m\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{\pi}{2}$

(b)

zurückgelegter Weg x_0:

$F = ma = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad F(v) = -(\alpha + \beta v^2)$
Es gilt:

$$\begin{aligned}
F &= -F(v) \\
m\frac{dv}{dx}v = -(\alpha + \beta v^2) & \\
mdv &= -(\frac{\alpha}{v} + \beta v)dx \\
\frac{mdv}{\frac{\alpha}{v} + \beta v} &= -dx \\
\left(\frac{mv}{\alpha + \beta v^2}\right)dv &= -dx \\
\frac{m}{\beta}\left(\frac{v}{\frac{\alpha}{\beta} + v^2}\right)dv &= -dx \\
\frac{m}{\beta}\int_{v_0}^{v=0}\left(\frac{v}{\frac{\alpha}{\beta} + v^2}\right)dv &= -\int_{x=0}^{x_0} 1dx \\
\frac{m}{\beta}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta} + 0\right) - \ln\left(\frac{\alpha}{\beta} + v_0^2\right)\right) &= -x_0 \\
x_0 &= \frac{m}{2\beta}\left(-\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \ln\left(\frac{\alpha}{\beta} + v_0^2\right)\right) \\
&= \frac{m}{2\beta}\ln\left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{+}v_0^2\frac{\alpha}{\beta}\right) \\
&= \frac{m}{2\beta}\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}v_0^2\right)
\end{aligned}$$

Skizze:

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (schriftlich): Schraubenlinie und Evolute

(a)
$\vec{r} = (Rcos(wt), R\sin(wt), bwt)$

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \\
&= \frac{d\vec{r}(s)\cdot dt}{dt\cdot ds} \\
mit\ \frac{ds}{dt} = \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| : \quad &= \frac{\dot{\vec{r}}}{|\ \dot{\vec{r}}\ |} \\
&= \frac{(-R\sin(wt)w, R\cos(wt)w, wb)}{\sqrt{w^2\Big(R^2(\sin^2 wt + \cos^2 wt) + b^2\Big)}} \\
&= \frac{(-R\sin(wt), R\cos(wt), b)}{\sqrt{R^2+b^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{|\ \frac{d\vec{T}}{ds}\ |} \\
\rightarrow \frac{d\vec{T}}{ds} &= \frac{d\vec{T}\cdot dt}{ds\cdot dt} \\
&= \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{r}}|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{R^2+b^2}} \begin{pmatrix} -Rw\cos(wt) \\ -Rw\sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{w\sqrt{R^2+b^2}} \\
&= \ldots \\
&= \frac{R}{R^2+b^2} \begin{pmatrix} -\cos(wt) \\ -\sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| &= \frac{R}{R^2+b^2} \\
\Rightarrow \vec{N} &= \begin{pmatrix} -\cos(wt) \\ -\sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{R^2+b^2}} \begin{pmatrix} -R\sin(wt)) \\ R\cos(wt) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(wt) \\ -\sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{r}{R^2+b^2} \begin{pmatrix} -\sin(wt) \\ -b\cos(wt) \\ R\Big(\sin(wt)^2+\cos(wt)^2\Big) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{R^2+b^2}} \begin{pmatrix} b\sin(wt) \\ -b\cos(wt) \\ R \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(b)

Krümmungsradius $= \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d\vec{T}(s)}{ds} = \dfrac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$

Möglichkeit1:
Bogenlänge mit Riemann-Integral :

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \mid \dot{\vec{r}}(t) \mid dt` \\
&= \int_0^t \sqrt{R^2w^2\sin(wt)^2 + R^2w^2\cos(wt)^2 + b^2w^2}dt` \\
&= \int_o^t \sqrt{w^2(R^2(\sin(wt)^2+\cos(wt)^2)) + b^2}dt` \\
&= \int_o^t w\sqrt{R^2+b^2}dt \\
s(t) &= w\sqrt{R^2+b^2}t \\
\Rightarrow wt &= \frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}} \\
\rightarrow \vec{T}(s) &= \begin{pmatrix} -R\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}) \\ R\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{R^2+b^2}} \\
\frac{1}{\rho} &= \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} \frac{-R}{\sqrt{R^2+b^2}}\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}) \\ \frac{-R}{\sqrt{R^2+b^2}}\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{R^2+b^2}} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}) \\ \sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{-R}{R^2+b^2} \right| \\
&= \sqrt{\frac{\Big(\cos(wt)^2+\sin(wt)^2\Big)R^2}{(R^2+b^2)^2}} = \frac{R}{R^2+b^2} \\
\Rightarrow \rho &= \frac{R^2+b^2}{R}
\end{aligned}
$$

Möglichkeit2:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} &= \Big|\frac{d\vec{t}(s)}{ds}\Big| \\
&= \left|\frac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{-Rw}{\sqrt{R^2+b^2}}}{w\sqrt{R^2+b^2}}\begin{pmatrix}\cos(wt)\\ \sin(wt)\\ 0\end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\frac{-R}{R^2+b^2}\begin{pmatrix}\cos(wt)\\ \sin(wt)\\ 0\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{R}{R^2+b^2} \\
\Rightarrow \rho &= \frac{R^2+b^2}{R}
\end{aligned}
$$

(c)

$\vec{m}(t) = \vec{r}(t) + \vec{N}(t)\rho(t)$
$\vec{m}(t)$ ensteht durch Vektoraddition, $\vec{N}(t)$ zeigt immer zum Mittelpunkt des Krümmungskreises und hat die Länge 1(ist normiert).$\rho(t)$ ist der Radius des Krümmungskreises.
Kennzeichen einer Schraubenlinie:

- Radius konstant
- Ganghöhe konstant

$$\begin{aligned}
\vec{m}(t) &= \begin{pmatrix} R\cos(wt) \\ R\sin(wt) \\ bwt \end{pmatrix} + \frac{R^2+b^2}{R}\begin{pmatrix} -\cos(wt) \\ -\sin(wt) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R\cos(wt) - \frac{R^2+b^2}{R}\cos(wt) \\ R\sin(wt) - \frac{R^2+b^2}{R}\sin(wt) \\ bwt \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{b^2}{R}\cos(wt) \\ \frac{b^2}{R}\sin(wt) \\ bwt \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der Durchmesser ist 2mal der Radius $R_E, d = 2R_E = 2\frac{b^2}{R}$

Aufgabe 2 (schriftlich): Massenpunkt auf logarithmischer Spirale

(a)

$$\begin{aligned}
\rho &= ae^{-b\varphi} && (1)\\
\dot{\rho} &= ae^{-b\varphi}(-b\dot{\varphi}) && (2)\\
\ddot{\rho} &= (-ba)\Big((-b\dot{\varphi})e^{-b\varphi}\dot{\varphi} + e^{-b\varphi}\ddot{\varphi}\Big)\\
&= ab^2\dot{\varphi}^2e^{-b\varphi} - ab\ddot{\varphi}e^{-b\varphi} && (3)
\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung können mithilfe der Formeln aus dem Skript berechnet werden:

$$\begin{aligned}
v &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\\
a &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi\\
(1),(2)und(3)Einsetzten:&\\
v &= ..\\
&= a\dot{\varphi}e^{-b\varphi}(-b\vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi)\\
a &= ...\\
&= ae^{-b\varphi}\left((-\ddot{\varphi}b + \dot{\varphi}^2b^2 - \dot{\varphi^2})\vec{e}_\rho + (\ddot{\varphi} - 2b\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\varphi\right)
\end{aligned}$$

(b)

Die Aufgabenstellung gibt uns nun die Definition $\varphi = wt, \quad \dot{\varphi} = w, \quad \ddot{\varphi} = 0$
Auf den Körper wirkt die Kraft $F = ma$
Nun setzen wir (1) in $F = ma$ ein, mit $\varphi = wt$ usw.

$$\begin{aligned}
F &= mae^{-bwt}\left((w^2b^2 - w^2)\vec{e}_\rho + (-2bw^2)\vec{e}_\varphi\right)\\
&= mae^{-bwt}\left(w^2(b^2-1)\vec{e}_\rho - 2b\vec{e}_\varphi\right)
\end{aligned}$$

Interpretation:
Da $\vec{e}_\rho$ und $\vec{e}_\varphi$ den Vorfaktor e^{-bwt} besitzen,gehen beide Kräfte gegen Null.Dies ist auch in Übereinstimmung mit der Vorstellung, dass die Geschwindigkeit kleiner werden muss,sonst wäre die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant

Aufgabe 3 : Autofahrt in den Bergen

(a)
Es gilt:

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{h}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \\ mit\ x = vt: & \\ z(t) &= \frac{h}{2}\sin\left(2\pi\frac{v}{d}t\right) \end{aligned}$$

(b)
Abhebebedingung:

$$\ddot{z}(t) = -g$$

$$2h\pi^2\frac{v^2}{d^2}\sin\left(\frac{2\pi x}{d}\right) = g$$

sin kann weggelassen werden,da er maximal 1 ist:

$$\Rightarrow v = \frac{d}{\pi}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (schriftlich): Zentrifugal- und Corioliskraft

(a)

(1)

$$\begin{aligned} a_z &= w^2 r \\ &= (2\pi f)^2 r \\ &= (2\pi \frac{3000}{60s})^2 0,15m \approx 15 \cdot 10^3 \frac{m}{s^2} \\ m &= 1 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 kg \\ &= \frac{4}{3}\pi (0,5 \cdot 10^{-2})^3 kg \approx 5,2 \cdot 10^{-7} kg \\ F_Z &= m \cdot a_Z \approx 7,8 \cdot 10^{-3} N \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 10g &= w^2 r 0 (2\pi f)^2 r \\ \rightarrow f^2 &= \frac{10g}{r4\pi} \\ &= \frac{10g}{6 \cdot 4\pi^2} \frac{1}{s^2} \approx 0,41 \frac{1}{s^2} \\ \Rightarrow f &= 0,64 \frac{1}{s} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} 40075km &= u = 2\pi r \\ r &= \frac{40075}{2\pi} km \\ a_{\ddot{A}} &= 4\pi^2 f^2 r \\ &= \left(\frac{2\pi}{86400s}\right)^2 \frac{40075 \cdot 10^3}{2\pi} \frac{m}{s^2} \\ &= 0,03373 \frac{m}{s^2} \\ a_M &= \left(\frac{2\pi}{86400s}\right)^2 \cdot 4082,92 \cdot 10^3 m \\ &= 0,02159 \frac{m}{s^2} \\ g_{\ddot{A}} &= (9,81 - 0,03373)N \\ g_M &= (9,81 - 0,02159)N \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Am Südpol ist die Anziehungskraft größer als am Äquator. Am Äquator ist das Gewicht kleiner.

(4)

$r = 150 \cdot 10^6 \cdot 10^3 m$

$f = \frac{1}{365d} = \frac{1}{365 \cdot 86400s}$

$$a_z = w^2 r = (2\pi f)^2 r$$

$$
\begin{aligned}
a_E &= (2\pi \frac{1}{365 \cdot 86400})150 \cdot 10^9 m \\
&= 5,889 \frac{m}{s^2} \\
a_{Mond} &= (2\pi \frac{1}{23606225})^2 38400 \cdot 10^3 m \\
&= 0,002723 \frac{m}{s^2}
\end{aligned}
$$

(b)

Aufgabe 2 (schriftlich): Potential und Energieerhaltung

(a)

Gegeben: $V(x) = -7xe^{-\frac{x}{3}}J$X ,x in Meter, $W_{kin}(5m) = 2J$

$$\begin{aligned} W &= V(5m) + 2J \\ &= -35e^{-\frac{5}{3}}J + 2J \\ &\approx -4,6J \end{aligned}$$

(b)

Skizze:

(c)

Das Teilchen bewegt sich, wenn die Gesamtenergie größer ist als die pot.Energie. Somit bewegt sich das Teilchen zwischen $x_1 \approx 0,9m$ und $x_2 = 7m$

(d)

Bei minimaler potentieller Energie ist die kin.Energie am größten.$\Rightarrow W_{kin} = W_{ges} - V$. Der Zeichnung entnehmen wir den Wert 3,1 J

(e)

Der x-Wert an dieser Stelle ist 3m (x_s).

(f)

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{dV}{dx} \\ &= -(-7xe^{\frac{x}{3}}) \\ &= 7e^{-\frac{x}{s}}(1-\frac{1}{3}x) \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \\ 7e^{-\frac{x}{3}}(1-\frac{1}{3}x) &= 0 \end{aligned}$$

$e^{-\frac{x}{3}}$ wird nie Null,also

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{3} &= 0 \\ 1 &= \frac{1}{3}x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

für $x = 3$ ist $F(x) = 0$

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (schriftlich): Mathematisches Pendel

(a)

Skizze:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
E &= V + T = -mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \\
\vec{r} &= l\begin{pmatrix}\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix} \\
\dot{r} &= l\dot{\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ -\sin\varphi\end{pmatrix} \\
\Rightarrow \dot{\vec{r}}^2 &= \dot{\varphi}^2 l^2\Big(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\Big) = \dot{\varphi}^2 l^2 \\
\Rightarrow E &= -mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}m(\dot{\varphi}^2 l^2)
\end{aligned}
$$

(b)

mit $\cos \simeq 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$

$$
\begin{aligned}
E &= -mgl(1 - \frac{1}{2}\varphi^2) + \frac{1}{2}m(\dot{\varphi}^2 l^2) \\
\frac{1}{2}m(\dot{\varphi}^2 l^2) &= mgl(1 - \frac{1}{2}\varphi^2) + E \\
(\dot{\varphi}^2 l^2) &= 2gl(1 - \frac{1}{2}\varphi^2) + \frac{2E}{m} \\
\dot{\varphi} &= \frac{1}{l}\sqrt{2gl(1 - \frac{1}{2}\varphi^2) + \frac{2E}{m}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{t_o}^{t} dt &= l\int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{2gl(1-\frac{1}{2}\varphi^2)+\frac{2E}{m}}}d\varphi \\
t - t_0 &= l\int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\left(2gl+\frac{2E}{m}\right)}_{=a} - 2gl\frac{1}{2}\varphi^2}} \\
&= \frac{l}{\sqrt{a}}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{\frac{gl}{a}\varphi^2}_{=y^2}}}d\varphi \\
&= \frac{l}{\sqrt{a}}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}d\varphi \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Integral: &\qquad \rightarrow Substitution: \\
y^2 &= \frac{gl}{a}\varphi^2 \\
y &= \sqrt{\frac{gl}{a}\varphi^2} \qquad (2) \\
dy &= \sqrt{\frac{gl}{a}}d\varphi \\
d\varphi &= \sqrt{\frac{a}{gl}}dy \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\ in\ (1):\ t - t_0 &= \frac{l}{\sqrt{a}}\int_0^{y} \frac{1}{1+y^2}dy \cdot \sqrt{\frac{a}{gl}} \qquad (4) \\
&= \sqrt{\frac{l}{g}}\Big[\arcsin y\Big]_0^y \\
t - t_0 &= \sqrt{\frac{l}{g}}\arcsin y \\
y &= \sin\left((t-t_0)\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \overset{(2)}{=} \sqrt{\frac{gl}{2gl+\frac{2E}{m}}}\cdot\varphi \\
\varphi(t) &= \sqrt{\frac{2gl+2\frac{E}{m}}{gl}}\sin\left((t-t_0)\sqrt{\frac{g}{l}}\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (schriftlich): Bewegung in beliebigem Potential

(a)

$$V_1 = \begin{cases} 0 & \text{für} - \text{b} \le \text{x} \le \text{b} \\ \infty & \text{für x} < -\text{b und x} > \text{b} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E &= T + V \\
v &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)} \\
\frac{dx}{dt} &\overset{(V=0)}{=} \sqrt{\frac{2}{m}(E - 0)} \\
\int_0^{\frac{T}{4}} dt &= \int_0^b \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}E}} dx \\
\frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{b}{\sqrt{E}} \\
T &= 4\sqrt{\frac{m}{2E}} b \\
E = \frac{1}{2}mv^2,\ da\ V = 0:\ T &= 4\sqrt{\frac{2m}{2mv^2}} b = \frac{4b}{v} \\
\Rightarrow T &= \frac{4b}{v}
\end{aligned}$$

(b)

$V_2 = a|x|$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{T}{4}} dt &= \int_0^b \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}} dx \\
&= \int_0^b \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - ax)}} dx \\
\frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{(E - ax)}} dx \\
\frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{m}{2}} \left[-\frac{2}{a}\sqrt{ax + E} \right]_0^b \\
\frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{m}{2}} \Big(-\frac{2}{a} \underbrace{\sqrt{-ab + E}}_{=0} + \frac{2}{a}\sqrt{E} \Big) \qquad weil\ ab = E_{ges} = E \\
T &= 8\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{a} \sqrt{E} \\
&= \frac{8}{a}\sqrt{\frac{mE}{2}} \\
mit\ E = \frac{1}{2}mv^2 + ax &= \frac{8}{a}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}m^2v^2 + max}{2}} \\
&= \frac{8}{a}\sqrt{\frac{1}{4}m^2v^2 + \frac{1}{2}max}
\end{aligned}$$

„Interpretation“:

(a): Die Geschwindigkeit ändert nicht ihren Betrag,nur ihre Richtung.

(b): Hier gibt es eine Kraft, die die pot. Energie in kinetische Energie umwandelt.

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen und Potezreihenentwicklung

(a)
Lösungswege:

- z=a+bi einsetztten und nach Re(z),Im(z) auflösen.
- quadratische Ergänzung
- PQ-Formel

Wurzeln aus imaginären zahlen löst man, indem man die imaginäre Zahl auf die Euler-Form bringt,und dann anfängt,Wurzel zu ziehen.
(b)
2 Möglichkeiten,zur Lösung zu kommen:

- 1.Formel für Realteil/Imaginärteil von kompl. Zahlen benutzen
- 2.Vergleich von 2 Imaginärteilen/Realteilen

(1) mit erster Methode:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{i\varphi}) \\
\cos^4\varphi &= \Big(\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\Big)^4 \\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^4(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})^4 \\
&= \frac{1}{16}\Big(e^{2i\varphi}+2e^{i\varphi}e^{-i\varphi}+e^{-2i\varphi}\Big)^2 \\
&= \frac{1}{16}\Big(e^{2i\varphi}+2+e^{-2\varphi}\Big)^2 \\
&= \frac{1}{16}\Big(e^{4i\varphi}+2e^{i\varphi}+1+2e^{2i\varphi}+4+2e^{-2i\varphi}+1+2e^{-2i\varphi}+e^{-4i\varphi}\Big) \\
&= \frac{1}{16}\Big(6+\underbrace{e^{4i\varphi}+e^{-4i\varphi}}_{=2\cos 4\varphi}+\underbrace{4e^{2i\varphi}+4e^{-2i\varphi}}_{8\cos 2\varphi}\Big) \\
&= \frac{1}{8}\cos 4\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{3}{8} \quad (q.e.d.)
\end{aligned}$$

(2) mit 2. Methode:

$$\begin{aligned}
\Big(e^{i\varphi}\Big)^3 &= \Big(\cos\varphi+i\sin\varphi\Big)^3 \\
&= \Big(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi\Big)(\cos\varphi+i\sin\varphi) \\
&= \cos^3\varphi-\sin^2\varphi\cos\varphi+2i\sin\varphi\cos^2\varphi+i\cos^2\varphi\sin\varphi-i\sin^3\varphi-2\sin^2\varphi\cos\varphi \\
&= \cos^3\varphi-\sin^2\varphi\cos\varphi+2\sin^2\varphi\cos\varphi+i(3\sin\varphi\cos^2\varphi-\sin^3\varphi) \\
\Big(e^{i\varphi}\Big)^3 &= e^{3i\varphi}=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Imaginärteile beider Gleichungen gleichsetzen:

$$\begin{aligned}
\sin 3\varphi &= 3\sin\varphi\cos^2\varphi-\sin^3\varphi \\
&= 3\sin\varphi(1-\sin^2\varphi)-\sin^3\varphi \\
&= 3\sin\varphi-3\sin^3\varphi-\sin^3\varphi \\
&= 3\sin\varphi-4\sin^3\varphi \quad (q.e.d.)
\end{aligned}$$

(c)

Taylorreihe um Entwcklungspunkt $x_0 : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{3}}} \\ \grave{f}_1 &= -\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{4}{3}} \\ \grave{f}_1 &= \frac{4}{9}(1+x)^{-\frac{7}{3}} \end{aligned}$$

Damit ist die Taylorreihe von f_1 um $x_0 = 0,5$(2.Ordnung):

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ... \\ &\approx 1,12 + 0,28x + 1,12x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 e^{-x} \\ \grave{f}_1 &= e^{-x}(2x - x^2) \\ \grave{f}_1 &= e^{-x}(2 - 4x + x^2) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Taylorreihe von f_2 2.Ordnung(wie oben):

$$\begin{aligned} f_2(x) &= ... \\ &= e^{0,5}(\frac{5}{32} + \frac{7}{8}x + \frac{17}{8}x^2) \end{aligned}$$

Mit GTR:

x	exakter Wertf_1	exakter Wertf_2	Taylor − Wertf_1	Taylor − Wertf_2
$-0,7$	$1,49$	1	$1,47$	$1,06$
$-0,3$	$1,13$	$0,12$	$1,14$	$0,16$

(exakte Tabellenwerte dennoch leicht gerundet...)

$\boxed{\text{Übungsblatt 8}}$

Aufgabe 1 (schriftlich): Gedämpfter linearer harmonischer Oszillator

$\boxed{\ddot{x} + 2y\dot{x} + w_0^2 x = 0}$

(a)
gegeben:
$\rho = 8,95 \frac{g}{cm^3}$
$\eta = 0,9 \frac{kg}{ms}$
$d_z = 44mm = 0,044m$
$l = 73mm = 0,073m$
$D = 49 \frac{N}{m} \quad d = 2mm = 0,002m$
$R = 24mm = 0,024m$
$m = \rho \cdot V \approx 1kg$
$F(v) = -\eta A \frac{v}{d} = -b \cdot v \Rightarrow b = -\eta A \frac{v}{d}$

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{b}{2m} \\
&= \frac{\eta A}{2md} \\
&= \frac{0,9 \frac{kg}{ms} \cdot 2\pi \cdot 0,022m \cdot 0,073m}{2 \cdot 8,95 \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot \pi (0,022m)^2 \cdot 0,073m \cdot 0,002m} \\
&= \frac{0,9 \frac{kg}{ms}}{8,95 \frac{kg}{ms} \cdot 1000 \cdot 0,022m \cdot 0,002m} \approx 2,3 s^{-1} \\
T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{1kg}{40 \frac{N}{m}}} \approx 0,99s \\
w_0 &= \frac{2\pi}{T} \\
&= \sqrt{\frac{D}{m}} \approx 6,35 s^{-1} \\
w_d &= \sqrt{w_0^2 - y^2} \approx 5,92 s^{-1} \\
T_d &= \frac{2\pi}{w_d} \approx 1,06s
\end{aligned}
$$

(b)

$x(t) = C \cdot e^{-\gamma t} \sin(w_d t + \varphi_d)$
hier: $\varphi_d = 0$

$$\begin{aligned}
\Lambda &= -\ln \frac{x(t+T_d)}{x(t)} \\
&= -ln \frac{C \cdot e^{-\gamma(t+T_d)} \sin(w_d(t+T_d)+\varphi_d)}{C \cdot e^{-\gamma t} \sin(w_d t + \varphi_d)} \\
&= -\ln \frac{e^{-\gamma(t+T_d)}}{e^{-\gamma t}} \\
&= \gamma T_d \approx 2,43
\end{aligned}$$

(c)

$$\frac{\widehat{x}_{n+2}}{\widehat{x}_n} = ... = e^{\gamma 2T_d} \approx 0,0078 = 0,78\%$$

(d)

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} Ds^2 = \frac{1}{2} 40 \frac{N}{m} (0,02m)^2 = 0,8J \\
Nach\ 2T : W &= 0,8J \cdot 0,78\% = 0,00616J \\
\triangle W &\approx 0,79J\ wurde\ in\ Wärme\ umgewandelt
\end{aligned}$$

(e)

$Grenzfall: \ \gamma = w_0 \Rightarrow \frac{\eta A}{2md} = w_0 \Rightarrow \eta = 2mdw_0 A^{-1} \Rightarrow \eta \approx 2,5 \frac{kg}{ms}$

Aufgabe 2 (schriftlich): Harmonischer Oszillator mit periodischer äußerer Kraft

(a)

$\bar{w}_{\pm} = \pm\sqrt{w_0^2 - 2\gamma} = 5,46\frac{1}{s} \Rightarrow f = 0,865Hz$

(b)

$\bar{w} = 5,46s^{-1} \quad \widehat{x} = 0,2m$

$\Big|A\Big| = \frac{f}{m}\frac{1}{\sqrt{(\widehat{w}_0^2 - w_0^2)^2 + 4\gamma^2\widehat{w}^2}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f &= m\Big|A\Big|\sqrt{(\widehat{w}_0^2 - w_0^2)^2 + 4\gamma^2\widehat{w}^2} \\ &= 5,376N \end{aligned}$$

$mit\ D = \frac{F}{s}, \quad also\ D = \frac{F}{\widehat{x}} \rightarrow \widehat{x} = \frac{f}{D} = 13,4cm$

(c)

$\tan\varphi = \frac{Im(A)}{Re(A)} = \frac{2\gamma\bar{w}}{\bar{w}^2 - w_0^2} \approx -2,46J$

$\varphi = \arctan(-2,463) \approx 68^\circ$

Aufgabe 3 : Erzwungene Schwingung / Schwebung

$\ddot{x} + 16x = 160\cos(6t)$
Eine spezielle Lösung lautet: $x(t) = -\cos(6t) \cdot 8$
Eine Lösung der homogenen Gleichung ist:$x(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)$
Damit ist die allgemeine Lösung:
$x(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) - 8\cos(6t)$
Mit den Anfangsbedingungen:
$x(t = 0) = 0 : \quad C_1 = 8$
$\dot{x}(t = 0) = 0 : \quad C_2 = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= 8\cos(4t) - 8\cos(6t) \\ &= 8(\cos(4t) - \cos 6t) \\ &= -16\sin(5t) \cdot \sin(-t) \end{aligned}$$

(Ansatz für die spezielle Lösung: $-a\cos(6t) \rightarrow$ in die DGL...)

$\boxed{\text{Übungsblatt 9}}$

Aufgabe 1 (schriftlich): Zentrifugal- und Corioliskraft

(a)

$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(wt)}$
mit x_0 =Amplitude

Komplexe DGL für z(t) mit Re $z = x_s$

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + w^2 z = \tfrac{F_0}{m} e^{iwt}$$

Ansatz: $\quad z(t) = x_0 e^{iwt} : \quad x_0, z(t) \in Z$

$\rightarrow$In die DGL:

$$\begin{aligned}
x_0(-w^2 + 2\beta iw + w^2)e^{iwt} &= \frac{F_0}{m} e^{iwt} \\
x_0 &= \frac{F_0}{m}\frac{1}{2\beta iw} = |x_0|e^{i\varphi} \\
|x_0| &= \sqrt{x_0 \bar{x_0}} \\
&= \sqrt{\frac{F_0^2}{m^2}\frac{1}{4\beta^2 w^2}} \\
&= \frac{F_0}{m \cdot 2\beta w} \\
Phase \quad \varphi : \tan\varphi &= \frac{Im(x_0)}{Re(x_0)} \\
Im(\varphi) &= \frac{1}{2i}(x_0 - \bar{x}_0) \\
&= \frac{1}{2i}(\frac{F_0}{m2\beta iw} - \frac{F_0}{m2\beta(-i)w}) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{F_0}{m\beta iw} \\
&= -\frac{F_0}{m2\beta w} \\
Re(\varphi) &= \frac{1}{2}(x_0 + \bar{x}_0) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{F_0}{m2\beta iw} + \frac{F_0}{m2\beta(-i)w}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit wäre $\tan\phi = \infty \quad \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2}$
Die Lösung der DGL ist somit:

$$\begin{aligned}
x_s(t) &= Re\Big(x_0 e^{iwt}\Big) \\
&= Re\Big(|x_0|e^{i\varphi} \cdot e^{iwt}\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Re\Big(|x_0|e^{iwt+\varphi}\Big)\\
&= |x_0|\cos(wt+\varphi)\\
mit\ \varphi = -\frac{\pi}{2}: \quad &= |x_0|\sin(wt)
\end{aligned}$$

(b)

Momentane Leistung:

$$\begin{aligned}
P &= F\frac{dx}{dt}\\
&= F_0\cos(wt)|x_0|\cos(wt)w\\
mit|x_0| = \frac{F_0}{m\cdot 2\beta w}: \quad P &= \frac{\mathbf{F_0^2}}{\mathbf{2\beta m}}\cos^{\mathbf{2}}(\mathbf{wt})
\end{aligned}$$

Mittlere Leistung:

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{F_0^2}{2\beta m}\cos^2(wt)dt\\
&= \frac{F_0^2}{T2\beta m}\int_0^T \cos^2(wt)dt\\
mit\ \cos^2(x) = \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2x)\Big): \quad P &= \frac{F_0^2}{T2\beta m\cdot 2}\int_0^T 1+\cos(2wt)\\
&= \frac{F_0^2}{4T\beta m}\Big[t+\frac{1}{w}\sin(2wt)\Big]_0^T\\
&= \frac{F_0^2}{4T\beta m}\Big(T+\frac{1}{w}\sin(2wT)-0\Big)\\
mit\ T = \frac{2\pi}{w}: \quad &= \frac{F_0^2}{4T\beta m}\Big(T+\underbrace{\frac{1}{w}\sin(4\pi)}_{=0}\Big)\\
P &= \frac{\mathbf{F_0^2}}{\mathbf{4\pi m}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (schriftlich): Kraftfelder

(a)

$y = 2x$:

$$\begin{aligned}
\int_{0,0}^{2,4} & \Big(y^2\vec{e}_x + (x^3+xy)\vec{e}y\Big) d\vec{r} \\
&= \int_0^2 y^2 dx + \int_0^4 (x^3+xy)dy \\
&= \int_0^2 4x^2 dx + \int_0^4 (\frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{2}y^2)dy \\
&= \left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^2 + \left[\frac{1}{8\cdot 4}y^4 + \frac{1}{6}y^3\right]_0^4 \\
&= \frac{32}{3} + \frac{1}{8\cdot 4}4^4 + \frac{1}{6}4^3 \\
&= \frac{88}{3}
\end{aligned}$$

$y = x^2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 y^2 \quad dx & + \int_0^4 (x^3+xy)dy \\
&= \int_0^2 x^4 dx + \int_0^4 (2y^{\frac{3}{2}})dy \\
&= \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 + \left[\frac{4}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 \\
&= \frac{32}{5} + \frac{4}{5}\cdot 32 = 32
\end{aligned}$$

(b)

$y = 2x$

$$\begin{aligned}
\int F dr &= \int_0^2 x dx + \int_0^4 y dy \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 \\
&= 2 + 8 = 10
\end{aligned}$$

$y = x^2$

$$\begin{aligned}
\int F dr &= \int_0^2 x dx + \int_0^4 y dy \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 \\
&= 2 + 8 = 10
\end{aligned}$$

(c)

Das erste Kraftfeld ist nicht konservativ, da die beiden Linienintegrale nicht gleich sind.Das zweite könnte gleich sein,da wir zwei gleiche Linienintegrale berechnet haben.Dies zeigt aber noch nicht,dass *alle* Linienintegrale gleich sind.Um das zu zeigen,muss rot F=0 sein:

$$\nabla \times F = \nabla \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein mögliches Potential: $V = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (schriftlich): Zweidimensionales Kraftfeld

(a)
$m = 4$
$V(x, y) = x(48y - 14x)$
Startbedingungen: $t = 0$, $\dot{\vec{r}} = 0$, $\vec{r}_0 = -5\vec{e}_x + 10\vec{e}_y$

$$F = -gradV = -\begin{pmatrix} 48y - 28x \\ 48x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \frac{F}{m} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 48y - 28x \\ 48x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 12y - 7x \\ 12x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

Die die Bewegung beschreibenden Differentialgleichungen sind somit:

$$\ddot{x} = -12y + 7x \tag{1}$$
$$\ddot{y} = -12x \tag{2}$$

(b)

$$\rightarrow x = -\frac{1}{12}\ddot{y} \tag{3}$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{1}{12}\ddddot{y} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
(3), (4)\ in\ (1):\ -\frac{1}{12}\ddddot{y} &= -12y - \frac{7}{12}\ddot{y} \\
\frac{1}{12}\ddddot{y} - \frac{7}{12}\ddot{y} - 12y &= 0 \\
\ddddot{y} - 7\ddot{y} - 144y &= 0
\end{aligned}$$

Lösung der DGL: Ansatz: $u(t) = ae^{bt}$

$$\begin{aligned}
u(t) &= ae^{bt} \\
\ddot{u}(t) &= ab^2e^{bt} \\
\ddddot{u}(t) &= ab^4e^{bt}
\end{aligned}$$

In die DGL:

$$\begin{aligned}
ab^4e^{bt} - 7ab^2e^{bt} - 144abe^{bt} &= 0 \\
b^4 - 7b^2 - 144 &= 0
\end{aligned}$$

Substitution: $b^2 = z$

$$\begin{aligned}
z^2 - 7z - 144 &= 0 \\
z_{1/2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 144} = \frac{7}{2} \pm \frac{25}{2}
\end{aligned}$$

Resubstitution:

$z_1 = -9$	$z_2 = 16$
$b^2 = -9$	$b^2 = 16$
$b_1 = 3i, b_2 = -3i$	$b_3 = 4, b_4 = -4$

Die allgemeine Lösung der DGL ist die Linearkombination der 4 Lösungen:

$$y(t) = C_1e^{3it} + C_2e^{-3it} + C_3e^{4t} + C_4e^{-4t} \tag{5}$$

Die Vorfaktoren erhält man durch einsetzten der Anfangswerte:
$x(0) = -5 \quad y(0) = 10 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0$
Wir benötigen also nicht nur $y(t)$,sondern auch $\dot{y}(t), \ddot{y}(t), x(t), \dot{x}(t)$

$$\begin{aligned}
y(t) &= C_1e^{3it} + C_2e^{-3it} + C_3e^{4t} + C_4e^{-4t} \\
\dot{y}(t) &= 3iC_1e^{3it} - 3iC_2e^{-3it} + 4C_3e^{4t} - 4C_4e^{-4t} \\
\ddot{y}(t) &= -9C_1e^{3it} - 9C_2e^{-3it} + 16C_3e^{4t} + 16C_4e^{-4t}
\end{aligned}$$

x(t) erhält man mit $x = -\frac{1}{12}\ddot{y}$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{1}{12}(9C_1e^{3it} - 9C_2e^{-3it} + 16C_3e^{4t} + 16C_4e^{-4t}) \\
&= \frac{3}{4}C_1e^{3it} + \frac{3}{4}C_2e^{-3it} - \frac{4}{3}C_3e^{4t} - \frac{4}{3}16C_4e^{-4t} \\
\dot{x}(t) &= \frac{9}{4}iC_1e^{3it} - \frac{9}{4}iC_2e^{-3it} - \frac{16}{3}C_3e^{4t} + \frac{16}{3}16C_4e^{-4t}
\end{aligned}$$

Mit den Anfangswerten erhält man folgendes GLeichsungssystem:

$$\begin{array}{rclllllll}
-5 &=& \frac{3}{4}C_1 &+& \frac{3}{4}C_2 &-& \frac{4}{3}C_3 &-& \frac{4}{3}C_4 \\
10 &=& C_1 &+& C_2 &+& C_3 &+& C_4 \\
0 &=& \frac{9}{4}C_1 &-& \frac{9}{4}C_2 &-& \frac{16}{3}C_3 &+& \frac{16}{3}C_4 \\
0 &=& 3iC_1 &-& 3iC_2 &+& 4C_3 &-& 4C_4
\end{array} \quad \begin{array}{r} (0.1) \\ (0.2) \\ (0.3) \\ (0.4) \end{array}$$

Aus 0.3 und 0.4 ergibt sich: $C_1 = C_2$ und $C_3 = C_4$
Lösen des GLeichungssystems (mithilfe GTR) ergibt: $C_1 = C_2 = 2$ und $C_3 = C_4 = 3$

→ Einsetzen:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 2e^{3it} + 2e^{-3it} + 3e^{4t} + 3e^{-4t} \\
&= 4\Big(\frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2}\Big) + 6\Big(\frac{e^{4t} + e^{-4t}}{2}\Big) \\
&= 4\cos(3t) + 6\cosh(4t) \\
x(t) &= \frac{3}{2}e^{3it} + \frac{3}{2}e^{-3it} - 4e^{4t} - 4e^{-4t} \\
&= 3\cos(3t) - 8\cosh(4t)
\end{aligned}
$$

(c)

Aus x(t) und y(t) ergibt sich die Ortskurve:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 3\cos(3t) - 8\cosh(4t) \\ 4\cos(3t) + 6\cosh(4t) \end{pmatrix} \\
\dot{\vec{r}}(t) &= \begin{pmatrix} -9\sin(3t) - 32\sinh(4t) \\ -12\sin(3t) + 24\sinh(4t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (schriftlich): Zentralfeld und Drehimpuls

(a)

$V(r) = \frac{\alpha}{r^2}$

In ebenen Polarkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{e}_r \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \vec{L} &= m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= mr\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \\ &= mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \end{aligned} \tag{6}$$

(b)

$V(r) = \frac{\alpha}{r^2} = \frac{\alpha}{x^2 + y^2}$

Für die Kraft gilt:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -gradV \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \frac{\alpha}{x^2 + y^2} \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \alpha(x^2 + y^2)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha 2x(x^2 + y^2)^{-2} \\ \alpha 2y(x^2 + y^2)^{-2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\alpha}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\alpha}{(x^2 + y^2)^2} \vec{r} \end{aligned}$$

Gibt es ein Potential,so handelt es sich um ein konservatives Kraftfeld.Dann wiederum ist die Gesamtenergie des Teilchens konstant,ebenso der Drehimpuls.

Probe für $\vec{L}$:

Wenn $\vec{M} = 0$,dann ist L konstant:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{2\alpha}{r^2}\vec{r} = 0$$

(c)

Wir haben:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r^2} \\
\dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\
\rightarrow \dot{\vec{r}}^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \\
\Rightarrow E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\frac{m}{2} + \frac{\alpha}{r^2} \qquad (7) \\
mit(6): \quad \vec{L}^2 &= m^2r^4\dot{\varphi}^2 = L^2 \\
\rightarrow \dot{\varphi}^2 &= \frac{L^2}{m^2r^4} \\
in(7): \; E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r^2}
\end{aligned}
$$

Den minimalen Abstand r_{min} finden wir bei $\dot{r} = 0$:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r^2} \\
r^2 &= \frac{L^2 + \alpha 2m}{E2m} \\
r_{min} &= \sqrt{\frac{L^2 + \alpha 2m}{E2m}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 : Karussell

$gegeben : D = 4m \quad R = 2m \quad w_1 = 0,2Hz \quad m_B = 30kg \quad m_S = 40kg \quad \mu = 0,02$
Der Bruder rutscht,sobald:

$$\begin{aligned} F_z &= F_G\mu \\ m_B w_{max}^2 R &= m_B g\mu \\ \rightarrow w_{max} &= \pm\sqrt{\frac{g\mu}{R}} \approx \pm 0,3Hz \end{aligned}$$

Es gilt der Impulserhaltungssatz:
vorher:

$$\begin{aligned} L_{ges} &= m_{ges} v R \\ &= m_{ges} w_1 R^2 \\ &= 70kg \cdot 0,2Hz \cdot (2m)^2 \\ &= 56\frac{kgm^2}{s} \end{aligned}$$

Nachher:

$$\begin{aligned} L_{ges} &= m_S r^2 w_{max} + m_B R^2 w_{max} \\ m_S w_{max} r^2 &= L_{ges} - m_B R^2 w_{max} \\ \Rightarrow r &= \pm\sqrt{\frac{L_{ges}}{m_S w_{max}} - \frac{m_B}{m_S} R^2} \\ &= \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \approx \pm 1,3m \end{aligned}$$

Der negative Wert ist als Ergebnis irrsinnig,da es sich um ein praktisches Beispiel handelt.

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (schriftlich): Rutschender Stab

(a)

Skizze:

(b)

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{M_G} &= \vec{r} \times \vec{F_G} \\
&= \frac{l}{2} \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{l}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \sin\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{M_W} = \vec{r} \times \vec{F_W} & \\
&= l \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l}{2} mg \sin\alpha - l f_W \cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(c)

Im Gleichgeiwcht gilt(also wenn der Stab ruht):

- Summe aller Kräfte ist Null
- Summe aller Drehmomente ist Null

(d)

$$
\begin{aligned}
0 &= \vec{M}_G + \vec{M}_W \\
&= (\frac{l}{2} mg \sin\alpha - l f_W \cos\alpha)\vec{e}_z \\
\Rightarrow \vec{F}_W &= \frac{lmg\sin\alpha}{2l\cos\alpha} = \frac{mg\tan\alpha}{2}
\end{aligned}
$$

Der Stab bleibt gerade noch stehen,wenn ein Kräftgleichgewicht herrscht:

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_W &= \vec{F}_H \\
\frac{mg}{2}\tan\alpha &= \mu mg \\
\tan\alpha &= \frac{\mu mg2}{mg} = 2\mu
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (schriftlich): Satellit

(a)

Für einen die Erde umrundenden Satelliten gilt:

$$\begin{aligned} \vec{F}_G &= \vec{F}_z \\ G\frac{mM}{r^2} &= \frac{mv^2}{r} \\ \Rightarrow ??? \end{aligned}$$

$$v = \pm\sqrt{6,67 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 9,574 \cdot 10^{24}kg \cdot \frac{1}{6570000m}} \approx \pm 7,78 \cdot 10^3\frac{m}{s}$$

(b)

$$v_1 = \pm\sqrt{6,67 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 9,574 \cdot 10^{24}kg \cdot \frac{1}{6370000m}} \approx \pm 7,91 \cdot 10^3\frac{m}{s}$$

(c)

$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6570km}{v} \approx 530 \cdot 10s \approx 1,47h$

$T_1 = \frac{2\pi r_E}{v_1} \approx 506 \cdot 10s \approx 1,41h$

Alternativ mit $\frac{T_S^2}{r_s^3} = \frac{T_M^2}{r_M^3}$ wobei T_S, r_S bezüglich Satellit und T_M, r_M bezüglich Mond

(d)

$$\begin{aligned} E_{Ges} &= E_{kin} + E_{pot} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m + G\frac{M}{r} - \frac{1}{2}m\frac{M}{r} \\ &= -\frac{1}{2}V(r) \\ E_{ges,a} &\approx -1,51 \cdot 10^{10}J \\ E_{ges,b} &\approx -1,57 \cdot 10^{10}J \end{aligned}$$

(e)

Geschwindigkeit der Rakete durch die Erddrehung:
$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}500kg(464\frac{m}{s})^2 \approx 5,3 \cdot 10^7 J$
Diese Energie ist zwar kleiner als die in (c)/(d) berechneten Energien,doch sie ist dennoch groß genug, um sie sich bei einem realen Raketenstart zunutze machen zu können.

(f)

Skizze:

Die Energie der Rakete muss mindestens Null sein,um die Erdanziehungskraft zu überwinden(anhand der Potentiallandschaft ersichtlich).

$$\begin{aligned} E_{ges} &\geq 0 \\ \rightarrow E_{kin} &= -E_{pot} \\ \frac{1}{2}mv^2 &= G\frac{mM}{r_E} \\ v &= \sqrt{\frac{2GM}{r_E}} \approx 11,2\frac{km}{s} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 : Zentralpotential

(a)

siehe UB10-Aufgabe2b

(b)

siehe UB10-Aufgabe2c

Skizze:

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (schriftlich): Hyperbeln

geg:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{k}(1+\epsilon\cos\varphi) \\ k &= \frac{L^2}{GMm^2} \end{aligned} \tag{1}$$

(a)
$r = \infty$
somit:

$$\begin{aligned} \frac{k}{r_\infty} - 1 &= \epsilon\cos\varphi \\ -\frac{1}{\epsilon} &= \cos\varphi_\infty \\ \Rightarrow \varphi_\infty &= \arccos -\frac{1}{\epsilon} \end{aligned} \tag{2}$$

Gleichung für φ:

$$\begin{aligned} (\pi-\theta) &= 2\pi - 2\varphi_\infty \\ -\varphi_\infty &= \frac{((\pi-\theta)-2\pi)}{2} \\ \Rightarrow \varphi_\infty &= \frac{\phi+\pi}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

$(2) = (3)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon} &= \cos(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{2}) \\ &= -\sin(\frac{\phi}{2}) \\ \Rightarrow \phi &= 2\arcsin(\frac{1}{\epsilon}) \end{aligned}$$

(b)

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= m|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| \\
&= m|\vec{r}_{\infty_\perp} \times \dot{\vec{r}}_\infty| \\
mit\ \vec{r}_{\infty_\perp} = d: \quad &= md|\dot{\vec{r}}_\infty| \\
\Rightarrow |\dot{\vec{r}}_\infty| &= \frac{\vec{L}}{md}
\end{aligned}$$

Damit in den Energieerhaltungssatz:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_\infty^{\,2} \\
&= \frac{1}{2}m\frac{\vec{L}^2}{m^2d^2} \\
&= \frac{\vec{L}^2}{2md^2} \\
\rightarrow \vec{L}^2 &= 2emd^2 = L^2
\end{aligned}$$

(c)

$\vec{r}_0 = \frac{k}{1+\epsilon} \quad \dot{\vec{r}} = 0$,also keine Energie in radialer Richtung

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0}$$

aus(1) folgt : $L^2 = kgMm^2$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{kGMm^2}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0} \\
&= GMm\Big(\frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0}\Big)
\end{aligned}$$

setze $r_0 = \frac{k}{1+\epsilon}$ ein:

$$\begin{aligned}
E &= GMm\Big(\frac{(1+\epsilon)^2}{2k} - \frac{1+\epsilon}{k}\Big) \\
&= GMm\Big(\frac{\epsilon^2-1}{2k}\Big)
\end{aligned}$$

(d)

Es gilt:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{L^2}{GMm^2} \\
und \quad L^2 &= 2Ed^2m \\
\Rightarrow k &= \frac{2Ed^2m}{GMm^2} \\
d &= \frac{L}{\sqrt{2mE}}
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\epsilon^2 - 1 &= \frac{E2k}{GMm} \\
&= \frac{E2L^2}{G^2M^2m^3} \\
&= \frac{E^24d^2}{G^2M^2m^2} \\
\frac{1}{\sin^2\frac{\phi}{2}} - 1 &= \left(\frac{E2d}{GMm}\right)^2 \\
\frac{1-\sin^2\frac{\phi}{2}}{\sin^2\frac{\phi}{2}} &= \left(\frac{E2d}{GMm}\right)^2 \\
\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}}{\sin^2\frac{\phi}{2}} &= \left(\frac{E2d}{GMm}\right)^2 \\
\frac{1}{\tan^2\frac{\phi}{2}} &= \left(\frac{E2d}{GMm}\right)^2 \\
\tan\frac{\phi}{2} &= \frac{GMm}{2Ed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (schriftlich): Anziehungskraft eines massebelegten Zylinders

Skizze:

Es gilt:

$$F = \frac{GMm}{R^2} \tag{4}$$
$$dM = 2\pi r\rho dr dz \tag{5}$$
$$M = 2\pi r\rho \int_0^A dr \int_{l+\frac{l}{2}}^{l-\frac{l}{2}} dz \tag{6}$$

Ausserdem muss nur die Kraft in z-Richtung betrachtet werden:
SKizze:

Der SKizze ist zu entnehmen:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{z}{R} && (7)\\
R &= \sqrt{r^2+z^2} && (8)\\
dF_\perp &= dF\cos\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4-7)in(8):\ dF_\perp &= Gm\frac{dM}{R^3}z\\
dF_\perp &= Gm2\pi r\rho drdz\frac{z}{R^3}\\
&= Gm2\pi r\rho drdz\frac{z}{z^2+r^2}\\
F_\perp &= Gm2\pi\rho\int_{z=l-\frac{l}{2}}^{l+\frac{l}{2}}\int_{r=a}^{A}\frac{rz}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}drdz\\
&= Gm2\pi\rho\int_{z=l-\frac{l}{2}}^{l+\frac{l}{2}}\left[-\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_a^A dz\\
&= Gm2\pi\rho\int_{z=l-\frac{l}{2}}^{l+\frac{l}{2}}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}-\frac{z}{A^2+z^2}\right)dz\\
&= Gm2\pi\rho\left(\left[\sqrt{a^2+z^2}\right]_{l-\frac{l}{2}}^{l+\frac{l}{2}}-\left[\sqrt{A^2+z^2}\right]_{l-\frac{l}{2}}^{l+\frac{l}{2}}\right)\\
&= 2\pi\rho Gm\left(\sqrt{a^2+(l+\frac{l}{2})^2}-\sqrt{a^2+(l-\frac{l}{2})^2}-\sqrt{A^2+(l+\frac{l}{2})^2}+\sqrt{A^2+(l-\frac{l}{2})^2}\right)
\end{aligned}$$

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (schriftlich): Physikalisches Pendel

(a)

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a dxdydz\rho(x^2+y^2) \\ &= \rho\frac{2}{3}a^5 \\ &= M\frac{2}{3}a^2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} J &= M\frac{1}{6}a^2 \\ &= \frac{1}{2}Ma^2 + \underbrace{\frac{3}{6}Ma^2}_{MS^2} \\ \Rightarrow S^2 &= \frac{3}{6}a^2 = \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

(c)

$mit R = \frac{1}{2}\sqrt{2}a = \frac{a}{\sqrt{2}} und \sin\varphi = \frac{\vec{M}}{Mg}$

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= -MgR\sin\varphi \\ \ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{mga}{\sqrt{2}J}}_{=w^2}\sin\varphi = 0 \end{aligned}$$

für kleine Winkel: $\sin\varphi = \varphi$

(d)

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{mga}{\sqrt{2}J}} \\ &= \sqrt{\frac{mga3}{\sqrt{2}m2a^3}} \\ &= \sqrt{\frac{3g}{\sqrt{8}a}} \end{aligned}$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\frac{g}{l} &= w^2 \Rightarrow l = \frac{g}{w^2} \\
l &= \frac{g\sqrt{2}J}{mga} \\
&= \frac{\sqrt{2}J}{ma} \\
&= \frac{J}{MR} \\
&= \frac{g\sqrt{8}a}{3g} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{2}a
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (schriftlich): Rollender Zylinder

(a)

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi}\int_0^L\int_0^r rdrdzd\varphi\rho(r)r^2 \\ &= \rho\int_0^{2\pi}\int_0^l \frac{1}{4}r^4dzd\varphi \\ &= \rho\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}r^4ld\varphi \\ &= \rho\frac{\pi}{2}r^4l \\ &= \underbrace{\rho l\pi r^2}_{=M}r^2\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}Mr^2 \end{aligned}$$

(b)

Der Zylinder fällt nicht runter,wenn gilt: $F_Z = F_G$
$\frac{mv^2}{h-r} = mg \quad \Rightarrow \quad v0\sqrt{g(h-r)}$
$E_{kin} inB :$

$$\begin{aligned} E_{kin} &= E_{rot} + E_{trans} \\ &= \frac{1}{4}mr^2\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mg(h-r) \\ &= \frac{1}{4}mv^2 + \frac{1}{2}mg(h-r) \\ &= \frac{3}{4}mg(h-r) \\ E_{pot} inB : \quad E_{pot} &= 2mg(h-r) \\ \Rightarrow E_{ges} &= mg2(h-r) + \frac{3}{4}mg(h-r) \\ &= mg(2(h-r) + \frac{3}{4}(h-r)) = mgH \\ H &= \frac{11}{4}(h-r) \end{aligned}$$

(c)

Hohlzylinder:

$E_{ges} = mgH = \frac{1}{2}mr^2\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mg(h-r) + 2mg(h-r)$

$$\rightarrow H = 3(h-r)$$

Mit steigendem Trägheitsmoment wird auch die Mindestanfangshöhe H größer.