Thomas Lorenz

Übungsblatt 1 A3

Aufgabe 1: Reduktionssatz:

a) **Beh:**

$$\int_R (2x+3)d(x,y) = 10 \qquad R = [0,2]\times[3,4]$$

Bew:

$$\begin{aligned}\int_R (2x+3)d(x,y) &= \int_3^4 \int_0^2 2x+3\,dx\,dy\\ &= \int_3^4 \left[x^2+3x\right]_0^2 dy\\ &= \int_3^4 10\,dy = [10y]_3^4 = 10 \quad \square\end{aligned}$$

b) **Beh:**

$$\int_R (xy+y^2)d(x,y) = 1+\frac{8}{3} \qquad R = [0,1]\times[0,2]$$

Bew:

$$\begin{aligned}\int_R (xy+y^2)d(x,y) &= \int_0^1 \int_0^2 xy+y^2\,dy\,dx\\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 dx\\ &= \int_0^1 \left(2x+\frac{8}{3}\right) dx = \left[x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^1 = 1+\frac{8}{3} \quad \square\end{aligned}$$

c) **Beh:**

$$\int_R \exp(x+y)d(x,y) = \exp\left(\frac{3}{2}\pi\right) - 2\exp(\pi) + \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad R = [\pi/2,\pi]\times[0,\pi/2]$$

Bew:

$$\begin{aligned}\int_R \exp(x+y)d(x,y) &= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi/2} \exp(x+y)\,dy\,dx\\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\exp(x+y)\right]_0^{\pi/2}\,dx\\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\exp(x+\pi/2)-\exp(x)\right)\,dx\\ &= \left[\exp(x+\pi/2)-\exp(x)\right]_{\pi/2}^{\pi}\\ &= \exp\left(\frac{3}{2}\pi\right)-\exp(\pi)-\exp(\pi)-\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \square\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Reduktionssatz:
Vor: $a, b, c > 0$

a) **Beh:** $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq c, 0 \leq y \leq \left(b - \frac{b}{c}z\right), 0 \leq x \leq \frac{abc-abz-acy}{cb}\}$

Bew: Batrachtet man als erstes die z-Koordinate so muss diese alle Werte von 0 bis c annehmen, also $0 \leq z \leq c$.
Nun ist die y Koordinate linear abhängig von der z Koordinate in der Art, dass y gleich b werden kann, wenn $z = 0$ und nur Null werden darf wenn $z = c$. Allgemein erfüllt ist dies durch $0 \leq y \leq b - \frac{b}{c}z$. Betrachten wir als letzten Fall einen Schnitt parallel zur xy-Ebene durch den Tetraeder, so ergibt dies ein Dreieck. Wobei die Länge der senkrechten x und y Seiten jeweils durch die Wahl der z-Koordinate begrenzt ist. Die Länge der x-Seite ist $a - \frac{a}{c}z$, analog die Länge der y-Seite $b - \frac{b}{c}z$ für festes z. Wählt man nun y so ergibt sich für den Maximalwert von x:

$$x_{max} = a - \frac{a}{c}z - \frac{a - \frac{a}{c}z}{b - \frac{b}{c}z}y = \frac{abc - abz - acy}{bc}$$

b) **Beh:** $Vol(V) = \frac{abc}{6}$

Bew: Für das Volumen gilt nun:

$$\begin{aligned}
Vol(V) &= \int_0^c \int_0^{b-\frac{b}{c}z} \int_0^{\frac{abc-abz-acy}{bc}} 1\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^c \int_0^{b-\frac{b}{c}z} \frac{abc - abz - acy}{bc}\, dy\, dz \\
&= \int_0^c \left[\frac{2abcy - 2abzy - acy^2}{2bc}\right]_0^{b-\frac{b}{c}z} dz \\
&= \int_0^c \frac{(2abc - 2abz)\left(b - \frac{b}{c}z\right) - ac\left(b - \frac{b}{c}z\right)^2}{2bc}\, dz \\
&= \int_0^c \frac{ab}{2} - \frac{abz}{c} + \frac{abz^2}{2c^2}\, dz \\
&= \left[\frac{abz}{2} - \frac{abz^2}{2c} + \frac{abz^3}{6c^2}\right]_0^c \\
&= \frac{abc}{2} - \frac{abc}{2} + \frac{abc}{6} = \frac{abc}{6} \quad \square
\end{aligned}$$

c) **Beh:** $\int_V x^2 y\, d(x,y,z) = \frac{1}{360}a^3b^2c$

Bew: Um die Reihenfolge der Integration zu verändern, setzt man nun:

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b - \frac{b}{a}x, 0 \leq y \leq \frac{abc - bcx - acy}{ab}\right\}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\int_V x^2 y \, d(x,y,z) &= \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \int_0^{\frac{abc-bcx-acy}{ab}} x^2 y \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{abcx^2y - bcx^3y - acx^2y^2}{ab} \, dy \, dx \\
&= \int_0^a \left[\frac{3abcx^2y^2 - 3bcx^3y^2 - 2acx^2y^3}{6ab} \right]_{y=0}^{b-\frac{b}{a}x} dx \\
&= \int_0^a \left(\frac{(3abcx^2 - 3bcx^3)\left(b - \frac{b}{a}x\right)^2 - 2acx^2\left(b - \frac{b}{a}x\right)^3}{6ab} \right) dx \\
&= \int_0^a \frac{cb^2}{6}x^2 - \frac{cb^2}{2a}x^3 + \frac{cb^2}{2a^2}x^4 - \frac{cb^2}{6a^3}x^5 \, dx \\
&= \left[\frac{cb^2}{18}x^3 - \frac{cb^2}{8a}x^4 + \frac{cb^2}{10a^2}x^5 - \frac{cb^2}{36a^3}x^6 \right]_0^a \\
&= \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{36} \right) cb^2 a^3 \\
&= \frac{20 - 45 + 36 - 10}{360} a^3 b^2 c = \frac{1}{360} a^3 b^2 c \qquad \square
\end{aligned}$$

d) Mit Hilfe der Substitutionsregel:
Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; F(x,y,z) = (ax, by, cz)$ und
$A := \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}$
so ist nun $F(A) = V$, F invertierbar $|\det(F')| = abc$.
Nun ist:

$$\begin{aligned}
Vol(V) &= \int_{F(A)} 1 = \int_A 1 \circ F \cdot \left|\det(F')\right| \\
&= abc \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx \\
&= abc \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \, dy \, dx \\
&= abc \int_0^1 \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2 \, dx \\
&= abc \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}abc
\end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned}
\int_{F(A)} x^2 y &= \int_A (x^2)\circ F \cdot \left|\det(F')\right| \\
&= a^3 b^2 c \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^2 y \, dz\, dy\, dx \\
&= a^3 b^2 c \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y - x^3 y - x^2 y^2 \, dy\, dx \\
&= a^3 b^2 c \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 - \frac{1}{2} x^3 y^2 - \frac{1}{3} x^2 y^3\right]_{y=0}^{1-x} dx \\
&= a^3 b^2 c \int_0^1 \left(\frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{6} x^5\right) dx \\
&= a^3 b^2 c \left[\frac{1}{18} x^3 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{36} x^6\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{360} a^3 b^2 c
\end{aligned}$$

Thomas Lorenz

Übungsblatt 2 A3

Aufgabe 2.1: Das kippende Bierglas

a) **Vor:** Ein zylindriches Glas mit dem Radius R wird bis zu einer Höhe H mit einer Flüssigkeit gefüllt und auf einer rutschfesten Ebene mit dem Neigungswinkel θ gestellt

Beh: Der Schwerpunkt des Glases liegt bei:

$$s = \left(\tan(\theta) \frac{R^2}{4H}, 0, \frac{4H^2 + \tan(\theta)^2 R^2}{8H} \right)$$

Bew: Die folgenden Überlegungen gelten für Winkel θ mit $\tan(\theta) \leq \frac{H}{R}$:
Mit der Wahl eines Koordinatensystems, dessen xy-Ebenene auf der Grundfläche des Zylinderns liegt und einer Drehung um die y Achse ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Vol(\Omega) &= \int_\Omega 1 dx = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^H 1 \, dz \, dy \, dx \\
&= H \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \, dy \, dx \\
&= 2H \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx \\
&= 2H \left[\frac{1}{2} x \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{1}{2} R^2 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) \right]_{-R}^{R} \\
&= 2H \left[\frac{1}{2} R^2 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} R^2 \frac{\pi}{2} \right] = \pi R^2 H
\end{aligned}$$

Nun gilt für den Schwerpunkt s der Flüssigkeit:

$$\begin{aligned}
s_x \cdot Vol(\Omega) &= \int_\Omega x = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{H+\tan(\theta)x} x \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} x(H + \tan(\theta)x) \, dy \, dx \\
&= \int_{-R}^{R} 2x(H + \tan(\theta)x)\sqrt{R^2 - x^2} \, dx \\
&= \underbrace{\int_{-R}^{R} 2Hx\sqrt{R^2 - x^2} \, dx}_{=0} + \int_{-R}^{R} 2\tan(\theta)x^2\sqrt{R^2 - x^2} \, dx \\
&= 2\tan(\theta) \int_{-R}^{R} x^2\sqrt{R^2 - x^2} dx \\
&= 2\tan(\theta) \left[-\frac{1}{4}x\sqrt{R^2 - x^2}^3 + \frac{1}{8}R^2\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{1}{8}R^4 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) \right]_{-R}^{R} \\
&= 2\tan(\theta) \left(0 + 0 + \frac{1}{8}R^4\pi \right) = \frac{1}{4}\tan(\theta)R^4\pi \\
s_y \cdot Vol(\Omega) &= \int_\Omega y = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{H+\tan(\theta)x} x \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-R}^{R} (H + \tan(\theta)x) \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y \, dy \, dx \\
&= \int_{-R}^{R} (H + \tan(\theta)x) 0 dx = 0 \\
s_z \cdot Vol(\Omega) &= \int_\Omega x = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{H+\tan(\theta)x} z \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{2}(H + \tan(\theta)x)^2 \, dy \, dx \\
&= \int_{-R}^{R} (H + \tan(\theta)x)^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx \\
&= \int_{-R}^{R} H^2\sqrt{R^2 - x^2} dx + 2H\tan(\theta) \underbrace{\int_{-R}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2} dx}_{=0} \\
&\quad + \tan(\theta)^2 \int_{-R}^{R} x^2\sqrt{R^2 - x^2} dx \\
&= \frac{1}{2}R^2H^2\pi + \frac{1}{8}\tan(\theta)^2R^4\pi
\end{aligned}$$

So ergibt sich für den Schwerpunkt

$$s = \left(\tan(\theta)\frac{R^2}{4H}, 0, \frac{4H^2 + \tan(\theta)^2R^2}{8H} \right)$$

b) **Beh:** Für den kritischen Winkel muss gelten

$$\frac{1}{8}\frac{R^2}{H}\tan(\theta_{krit})^3 + \left(\frac{1}{2}H + \frac{R^2}{4H}\right)\tan(\theta_{krit}) = R$$

Bew: Der Schwerpunkt muss beim kritischen Winkel senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche über dem Rand der Grundfläche liegen. Der oben angegebene Schwerpunkt ist der Schwerpunkt im Koordinatensystem des Glases. Für den Winkel θ muss nun also gelten:

$$\tan(\theta) = \frac{R - s_x}{s_z}$$

Einsetzen liefert:

$$\frac{1}{8}\frac{R^2}{H}\tan(\theta_{krit})^3 + \left(\frac{1}{2}H + \frac{R^2}{4H}\right)\tan(\theta_{krit}) = R$$

Durch Umformen erhält man

$$\tan(\theta_{krit})^3 + \left(4\frac{H^2}{R^2}H + 2\right)\tan(\theta_{krit}) - 8\frac{H}{R} = 0$$

Da nun

$$4 \cdot \left(4\frac{H^2}{R^2}H + 2\right)^3 + 27 \cdot \left(8\frac{H}{R}\right) > 0$$

erhällt man nach der Cardanischen Formel für $\tan(\theta)$ genau eine reelle Lösung durch:

$$\tan(\theta) = \sqrt[3]{\frac{4H}{R} + \sqrt{\left(\frac{4H}{R}\right)^2 + \left(\frac{2H^2}{R^2} + 1\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4H}{R} - \sqrt{\left(\frac{4H}{R}\right)^2 + \left(\frac{2H^2}{R^2} + 1\right)^3}}$$

Thomas Lorenz

Übungsblatt 3 A3

Aufgabe 3.2: Kanonische Formen

a) **Vor:** Symmetrischer Kreiskegel K mit Höhe H und Grundflächenradius R

Beh:

$$\mathrm{Vol}(K) = \frac{1}{3}\pi R^2 H \qquad \mathrm{Vol}_2(K) = \pi R\sqrt{R^2 + H^2}$$

Bew: Für die Rechnung in Zylinderkoordinaten die Transformation:

$$T(r,\varphi,z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$

Woraus sich die Determinante der Ableitung als

$$\det(T') = \det\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r$$

ergibt. Mit der Menge

$$A := \left\{(r,\varphi,z) : r\in[0,R], \varphi\in[0,2\pi], 0 \le z \le \left(H - \frac{H}{R}z\right)\right\}$$

ist das Volumen des Kegels

$$\begin{aligned} Vol(K) &= \int_K 1 = \int_{T(A)} 1 = \int_A 1\circ T\cdot\det(T') \\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{H-rH/R} r\,dz\,d\varphi\,dr \\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi} rH - r^2\frac{H}{R}\,d\varphi\,dr \\ &= 2\pi\int_0^R rH - r^2\frac{H}{R}\,dr \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{2}HR^2 - \frac{1}{3}HR^2\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 H \end{aligned}$$

Die Mantelfläche ist parametrisiert durch die Funktion $M : B_R(0) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$M(x,y) = \left(x, y, H - \frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Mit den Partiellen Ableitungen

$$\partial_x M = \left(1, 0, -\frac{H}{R}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \partial_y M = \left(0, 1, -\frac{H}{R}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

gilt für die Terme

$$(\partial_x M)^2 = 1+\frac{H^2}{R^2}\frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad (\partial_y M)^2 = 1+\frac{H^2}{R^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}, \quad \partial_x M \partial_y M = \frac{H^2}{R^2}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

woraus sich die Gramsche Determinante ergibt als

$$\begin{aligned}
\operatorname{gram}(\partial_x M, \partial_y M) &= (\partial_x M)^2(\partial_y M)^2 - (\partial_x M \partial_y M)^2 \\
&= \left(1+\frac{H^2}{R^2}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\left(1+\frac{H^2}{R^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) - \frac{H^4}{R^4}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 1+\frac{H^2}{R^2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{H^4}{R^4}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{H^4}{R^4}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 1+\frac{H^2}{R^2}
\end{aligned}$$

Für die Mantelfläche gilt nun

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}_2(K) &= \int_{\partial K} 1 = \int_{B_R(0)} 1 \circ M \sqrt{\operatorname{gram}(\partial_x M, \partial_y M)} \\
&= \sqrt{1+\frac{H^2}{R^2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr \\
&= 2\pi\sqrt{1+\frac{H^2}{R^2}} \cdot \frac{1}{2}R^2 = \pi R\sqrt{R^2+H^2}
\end{aligned}$$

b) **Vor:** Allgemeiner Kegel mit ebener Basismenge B

Beh:

$$\operatorname{Vol}(K) = \frac{1}{3}GH \qquad G = \operatorname{Vol}_2(B)$$

Bew: Wähle Koordinatensystem, so dass die Basismege B in der xy-Ebene liegt, also $B \subset \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ und die Kegelspitze auf der z-Achse liegt. Zusätzlich sei die Auswahlfunktion über einer Menge M

$$\mathbb{1}_M(x) \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Somit ergibt sich

$$G = \operatorname{Vol}_2(B) = \int_B 1 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x,y) \, dy \, dx$$

Mit der Transformation

$$T(x,y,z) = \left(H - \frac{z}{H}x, H - \frac{z}{H}y, \mathbb{1}_{[0,H]}(z)\right)$$

ergibt sich für

$$T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2 \times [0,H]$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(Z) &= \int_K 1 = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_K(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2\times[0,H]} \mathbb{1}_K(x,y,z)\circ T(x,y,z)\cdot \det(T')\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^H \mathbb{1}_B(x,y)\frac{z^2}{H^2}\mathbb{1}_{[0,H]}(z)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^H \frac{z^2}{H^2}dz\cdot\int_{R^2}\mathbb{1}_B(x,y)\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{3}HG
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.3: Mittlerer Erdradius

Vor: Die Erdkugel als Rotationsellipsoid mit den Halbachsen R_A am Äquator bzw. R_P an den Polen

Beh: Ein sinnvoller Mittelwert für den Erdradius ist das geometrische Mittel der Achsenradien, also

$$\overline{R}_E = \sqrt[3]{R_A^2\cdot R_P}$$

Bew: Eine sinnvolle Weise zur Mittelung des Radius ergibt sich aus der Annahme, dass das Volumen der Erde durch ein Kugelvolumen angenähert wird.
Sei die Menge M definiert als

$$M := [0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

Wenn K die Punktmenge einer Kugel mit dem mittleren Erdradius $\overline{R}_E$ ist, so gilt für

$$T_K(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \overline{R}_E r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \overline{R}_E r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \overline{R}_E r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

die Beziehung $T_K(M) = K$. Analog ergibt sich für die Transformation

$$T_E(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R_A r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ R_A r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ R_P r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

die Menge $T_E(M) = E$ als Rotationsellipse mit den Radien R_A bzw. R_P
Bezeichne K die Tranformation von Kugelkoordinaten in Kartesische und S eine Matrix mit den Diagonalelementen (R_A, R_A, R_P) und sonst Null so gilt für

$$\det(T_K') = \det(J_{T_K}) = \det(\overline{R}_E J_K) = \overline{R}_E^{\,3}\det(J_K)$$

und für die Funktionaldeterminate von T_E

$$\det(T_E') = \det(J_{T_E}) = \det(S\cdot J_K) = \det(S)\det(J_K) = {R_A}^2 R_P\det(J_K)$$

Nach der Überlegung sollen die Volumina übereinstimmen, woraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(K) &= \mathrm{Vol}(E) \\
\Leftrightarrow \int_K 1 &= \int_E 1 \\
\Leftrightarrow \int_M 1 \circ T_K \cdot \det(T_K') &= \int_M 1 \circ T_E \cdot \det(T_E') \\
\Leftrightarrow \det(T_K') &= \det(T_E') \\
\Leftrightarrow \overline{R}_E{}^3 \det(J_K) &= R_A{}^2 R_P \det(J_K) \\
\Leftrightarrow \overline{R}_E &= \sqrt[3]{R_A{}^2 R_P}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4: Kepplersche Fassregel

a) **Vor:** Fass F der Höhe $2a$ mit gebogenen Wänden als Kreissegment eines Kreises mit Radius R. Breite des Fasses an dickster Stelle $2d$ auf halber Höhe

Beh:

$$\mathrm{Vol}(F) = 2\pi(R-d)\left(a\sqrt{R^2-a^2} + R^2 \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}\right)\right)$$

Bew: Für das Volumen eines Rotationskörpers um die x-Achse gilt:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Wobei die Funktion f die seitliche begrenzende Funktion ist. Ein Kreissegment mit dem Mittelpunkt bei $x = -M$ und dem Radius R wird durch

$$y = \sqrt(R^2 - x^2) + M$$

beschrieben. Für das Volumen des Fasses gilt so

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} (\sqrt{R^2-x^2} + M)^2 dx \\
&= \pi \int_{-a}^{a} (R^2 - x^2 + 2M\sqrt{R^2-x^2} + M^2) dx \\
&= \pi \left(\underbrace{\int_{-a}^{a} R^2 - x^2 M^2 dx}_{=0} + \int_{-a}^{a} 2M\sqrt{R^2-x^2} dx \right) \\
&= 2\pi M \left[\frac{1}{2} x \sqrt{R^2-x^2} + \frac{1}{2} R^2 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right]_{-a}^{a} \\
&= 2\pi M \left[a\sqrt{R^2-a^2} + R^2 \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Mit $M = R - d$ folgt die Behauptung.

b) **Vor:** siehe oben

Beh:
$$\mathrm{Vol}(F) = 2\pi(R-d)\left(a\sqrt{R^2-a^2} + R^2 \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}\right)\right)$$

Bew: Sei $M := [0,1] \times [0,2\pi] \times [-1,1]$ und
$$T(r,\varphi,z) := ((\sqrt{R^2-z^2}+M)r\sin(\varphi), (\sqrt{R^2-z^2}+M)r\cos(\varphi), az)$$

so ist
$$T(M) = F$$

und die Funktionaldeterminante mit der Abkürzung $v = (\sqrt{R^2-z^2}+M)$
$$\det(T') = a \det\begin{pmatrix} vr\sin(\varphi) & vr\cos(\varphi) \\ vr\cos(\varphi) & -vr\sin(\varphi)\end{pmatrix} = av^2r$$

Nun ist
$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(F) &= \int_F 1 = \int_M 1 \cdot \det(T') \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 a(\sqrt{R^2-z^2}+M)^2 r \, dz \, d\varphi \, dr \\
&= \int^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} a(\sqrt{R^2-z^2}+M)^2 \, dz \, d\varphi \\
&= \pi a \int_{-1}^1 (\sqrt{R^2-z^2}+M)^2 \, dz \\
&= ... = 2\pi M \left[a\sqrt{R^2-a^2} + R^2 \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Mit $M = R-d$ folgt die Behauptung.

c) **Vor:** Rotationskörper der Höhe h und der stetigen höhenabgängigen Querschnittsfläche $q(z)$.

Beh:
$$V \approx \frac{h}{6}(q(h) + 4q(h/2) + g(0))$$

Bew: Das Volumen eines Rotationskörpers K ist bestimmt durch
$$V = \int_K 1 = \int_0^h \int_R^2 1 \, d(x,y) \, dz = \int_0^h q(z) \, dz$$

Eine Näheung der Funktion $q(z)$ bei drei Bekannten Stützstellen ist gegeben durch das quadratische Interpolationspolinom zu den Stützstellen $p(z)$ mit
$$p(z) = \frac{2(q(h) - 2q(h/2) + q(0))}{h^2} z^2 + \frac{-q(h) + 4q(h/2) - 3q(0)}{h} z + q(0)$$

Es gilt $p(z) \approx q(z)$ für beliebige Funktionen q und $p(z) = q(z)$ für quadratische, lineare und konstante q. Somit ergibt sich für das Volumen

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^h q(z)\,dz \approx \int_0^h p(z)\,dz \\
&= \int_0^h \frac{2(q(h) - 2q(h/2) + q(0))}{h^2} z^2 + \frac{-q(h) + 4q(h/2) - 3q(0)}{h} z + q(0)\,dz \\
&= \frac{2(q(h) - 2q(h/2) + q(0))}{3} h + \frac{-q(h) + 4q(h/2) - 3q(0)}{2} h + q(0) \\
&= h\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) q(h) + h\left(-\frac{2}{3} + 2\right) q(h/2) + h\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1\right) q(0) \\
&= \frac{h}{6}(q(h) + 4q(h/2) + g(0))
\end{aligned}$$

Thomas Lorenz

Übungsblatt 4 A3

Aufgabe 4.1: Gauß'scher Satz

a) **Vor:** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hinreichend glatt

Beh:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} \langle x, n(x)\rangle \; da$$

Bew:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\Omega) &= \int_\Omega 1 = \int_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^n \partial_k \frac{x_k}{n} = \int_\Omega \mathrm{div}\left(\frac{x}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} x\nu(x) = \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} \langle x, n(x)\rangle \; da
\end{aligned}$$

b) **Vor:** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hinreichend glatt, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$

Beh:

$$\int_\Omega \partial_k f(x) = \int_{\partial\Omega} f(x) n_k(x)$$

Bew: Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$g_i(x) = \begin{cases} f(x) & i = k \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_k f(x) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \partial_i g_i(x) = \int_\Omega \mathrm{div}(g(x)) \\
&= \int_{\partial\Omega} g(x)\cdot n(x) = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n g_i(x)\cdot n_i(x) \\
&= \int_{\partial\Omega} f(x) n_k(x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2: Gauß'scher Satz in 2D

a) **Vor:** γ die Parametrisiertung einer geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^2$, $Int(\gamma)$ konvex, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ glatt

Beh:

$$\int_{Int(\gamma)} \mathrm{div}(A) = \oint_\gamma A \cdot da$$

Bew: Seien a, b sowie die α, β definiert als:

$$a = \min_t \gamma_1(t) \qquad b = \max_t \gamma_1(t)$$

Sowie die von a und b abhängigen Variablen

$$\alpha(x) = \min_{t:\gamma_1(t)=x} \gamma_2(t) \qquad \beta = \max_{t:\gamma_1(t)=x} \gamma_2(t)$$

Diese sind eindeutig, da $Int(\gamma)$ konvex. Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_{Int(\gamma)} \partial_2 A_2 &= \int_a^b \int_\alpha^\beta \partial_2 A_2 \\
&= \int_a^b A_2(x, \beta(x)) - A_2(x, \alpha(x))dx \\
&= \int_a^b A_2(x, \beta(x))dx - \int_a^b A_2(x, \alpha(x))dx
\end{aligned}$$

Wählen wir nun als Parametrisierung der Kurve γ eine Parametrisierung nach der Kurvenlänge von Punkt a aus gegen den Uhrzeigersinn, so gibt es einen Wert l, so dass

$$\phi_1(0) = a = \phi_1(L) \qquad \phi_1(l) = b$$

Weiter ergibt sich die Tangente und die nach außen gerichtete Normale an die Kurve als

$$\tau = \phi' = (\phi_1', \phi_2') \qquad \nu = (\phi_2', -\phi_1')$$

Nun kann die obige Gleichung nach der Substutionsregel umgeformt werden

$$\begin{aligned}
\int_{Int(\gamma)} \partial_2 A_2 &= \int_a^b A_2(x, \beta(x))dx - \int_a^b A_2(x, \alpha(x))dx \\
&= \int_L^l A_2(\phi_1, \beta(\phi_1)) \cdot \phi_1' dx - \int_0^l A_2(\phi_1, \alpha(\phi_1)) \cdot \phi_1' dx \\
&= -\left(\int_l^L A_2(\phi) \cdot \phi_1' dx + \int_0^l A_2(\phi) \cdot \phi_1' dx\right) \\
&= -\oint_\gamma A_2 \cdot \phi_1' = \oint_\gamma A_2 \cdot n_2
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\int_{Int(\gamma)} \partial_1 A_1 = \oint_\gamma A_1 \cdot n_1$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_{Int(\gamma)} \operatorname{div}(A) &= \int_{Int(\gamma)} \partial_1 A_1 + \int_{Int(\gamma)} \partial_2 A_2 \\
&= \oint_\gamma A_1 \cdot n_1 + \oint_\gamma A_2 \cdot n_2 \\
&= \oint_\gamma A \cdot n
\end{aligned}$$

b) **Vor:** γ die Parametrisiertung einer geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^2$, $Int(\gamma)$ konvex, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ glatt

Beh:

$$\int_{Int(\gamma)} -\partial_2 A_1 + \partial_1 A_2 = \oint_\gamma A \cdot dl$$

Bew: Analoge Überlegungen und Definitionen zu Teil a führen zu:

$$\begin{aligned}
-\int_{Int(\gamma)} \partial_2 A_1 &= \int_a^b \int_\alpha^\beta -\partial_2 A_1 \\
&= \int_a^b A_1(x, \alpha(x)) - A_1(x, \beta(x)) dx \\
&= \int 0^l A_1(\phi)\phi_1' dx + \int_l^L A(\phi)\phi_1' dx \\
&= \oint_\gamma A_1 t_1 = \oint_\gamma A_1 \, dl_1
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\oint_\gamma A \cdot dl = -\int_{Int(\gamma)} \partial_2 A_1 + \int_{Int(\gamma)} \partial_1 A_2 = \int_{Int(\gamma)} -\partial_2 A_1 + \partial_1 A_2$$

Aufgabe 4.3: Geh' doch Heim mit deiner Ente!

Vor: $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3 \supset \Omega_2$, mit $\mathrm{vol}(\Omega_1) = \mathrm{vol}(\Omega_2)$

Beh:

$$\int_{\partial\Omega_1} x_3 \, da = \int_{\partial\Omega_2} x_3 \, da$$

Bew:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_1} x_3 \, da &= \int_{\Omega_1} \partial_3 x_3 = \int_{\Omega_1} 1 \\
&= \mathrm{vol}(\Omega_1) = \mathrm{vol}(\Omega_2) = \int_{\Omega_2} 1 \\
&= \int_{\Omega_2} \partial_3 x_3 = \int_{\partial\Omega_2} x_3 \, da
\end{aligned}$$

Thomas Lorenz

Übungsblatt 6 A3

Aufgabe 6.1: Auf der Rutsche
Die Kraft auf ein Teilchen mit der Bahn $x(t)$ ist definiert als

$$F = m \cdot \ddot{x}(t)$$

Nun ist

$$\partial_t^2 x_1 = \partial_t^2 \sigma(t) = \ddot{\sigma}(t)$$

Und für die zweite Kompontente gilt

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 x_2 &= \partial_t^2 H \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\sigma(t)}{\epsilon} \right) \right) \\
&= H \partial_t \frac{\dot{\sigma}(t)}{\epsilon \left(1 + \frac{\sigma(t)^2}{\epsilon^2} \right)} \\
&= H\epsilon \frac{2\dot{\sigma}(t)^2 \sigma(t) - \ddot{\sigma}(t)(\epsilon^2 + \sigma(t)^2)}{(\epsilon^2 + \sigma(t)^2)^2}
\end{aligned}$$

Somit ist die Kraft F gegeben durch

$$F = m \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\sigma}(t) \\ H\epsilon \frac{2\dot{\sigma}(t)^2 \sigma(t) - \ddot{\sigma}(t)(\epsilon^2 + \sigma(t)^2)}{(\epsilon^2 + \sigma(t)^2)^2} \end{pmatrix}$$

Der Parameter H gibt hier die Höhe der Rutsche an, während ϵ für die Skalierung der Bahn zuständig ist. Die unbekannte Funktion σ kann durch lösen der Differentialgleichung

$$\ddot{x}_2(t) = -g \qquad \sigma(0) = 0 \quad \dot{\sigma}(0) = 0$$

gefunden werden, wobei g die Erdbeschleunigung bedeutet. Es muss also

$$H\epsilon \frac{2\dot{\sigma}(t)^2 \sigma(t) - \ddot{\sigma}(t)(\epsilon^2 + \sigma(t)^2)}{(\epsilon^2 + \sigma(t)^2)^2} + g = 0$$

Alternativ kann auch die zurückgelegte Höhendifferenz zum Zeitpunkt t betrachtete werden. So gilt für den freien Fall und damit die Höhe

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \stackrel{!}{=} H \arctan \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \right)$$

Womit sich für σ ergibt

$$\sigma = \epsilon \tan \left(\frac{g t^2}{2H} \right)$$

Aufgabe 6.2: Separable DGL

i) **Beh:** $x = e^{\frac{1}{2}t^2 + c}$ löst $\dot{x} = tx$

Bew: Es ist

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = tx$$

Separation der Variablen liefert nun

$$\frac{dx}{x} = t\,dt$$

Aufintegrieren liefert nun

$$\ln(x) = \frac{1}{2}t^2 + c \quad \Rightarrow \quad x = e^{\frac{1}{2}t^2+c}$$

Die Konstante c ist hierbei bestimmt durch die Anfangsbedingungen

ii) **Beh:** $x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 + c}$ ist Lösung von $\dot{x} = t^3/x^2$

Bew: Es ist

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x^2}$$

Separation liefert wieder

$$x^2 dx = t^3 dt$$

Beidseitiges Integrieren liefert nun

$$\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{4}t^4 + c \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 + c}$$

Dabei wird c wieder von den Anfangsbedingunen bestimmt.

iii) **Beh:** $x = \sqrt{1-t^2}$ löst $\sqrt{1-t^2}\dot{x} + \sqrt{1-x}$

Bew: Auflösen nach $\dot{x}$ liefert hier

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-t^2}}$$

Separieren und Integrieren liefert nun

$$\arcsin(x) = \arccos(t) \quad \Rightarrow \quad x = \sin(\arccos(t)) = \sqrt{1-t^2}$$

iv) **Beh:** f ist Lösung von $t(x^2+1) + x(t^2+1)\dot{x} = 0$

Bew: Umformen nach $\dot{x}$ liefert

$$\dot{x} = -\frac{x^2+1}{x}\frac{t}{t^2+1}$$

Separieren und Integrieren liefert so

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = -\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c$$

Auflösen nach x^2 liefert dann

$$x^2(t) = \frac{(t^2+1)(c-t^2)}{(t^2+1)^2}$$

Aufgabe 6.3: Juhu wir werkeln

a) Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst genau dann lokal Lipschitz-stetig wenn es für jedes $x \in D$ eine Umgebung $U \subset D$ gibt, so dass für alle $y_1, y_2 \in U$ eine Konstante L existiert, so dass

$$\|f(y_1) - f(y_2)\| < L\,\|y_1 - y_2\|$$

b) **Beh:** Für $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen erfüllt $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ die lokale Lipschitzbedingung

Bew: Sei $x \in D$. Nun gibt es eine abgeschlossene Umgebung $\overline{U}$ zu x, so dass $U \subset D$. Nun gilt für ein y_1 und y_2 aus der Umgebung

$$f(y_2) = f(y_1) + D_f(y_1) \cdot (y_1 - y_2) + r(y_1, y_2)$$

Und für die Norm aus der Funktionsdifferenz

$$\|f(y_2) - f(y_1)\| = \|D(y_1 - y_2) + r(y_1, y_2)\| \leq \|D_f(y_1) \cdot (y_1 - y_2)\|$$

Setzt man nun $L := \sup \|D_f(y_1)\|$ so gilt

$$\|f(y_2) - f(y_1)\| \leq \|D_f(y_1)\|\,\|\cdot(y_1 - y_2)\| \leq L\,\|\cdot(y_1 - y_2)\|$$

c) **Beh:**

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \|x\| < \varepsilon \\ e^{-\frac{(\|x\| - 2\varepsilon)^2}{(\|x\| - \varepsilon)^2}} & \varepsilon < \|x\| < 2\varepsilon \\ 0 & \|x\| > 2\varepsilon \end{cases}$$

erfüllt die geforderten Bedingungen.

Bew: Konstruktiv

Es sei $h(x)$ definiert, wie auf dem Übungsblatt. So ist

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} h(x) = 1$$

Sei nun $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert als

$$g(x) := \frac{\|x\| - \varepsilon}{\|x\| - 2\varepsilon}$$

Für die Grenzwerte von $\|x\|$ gegen ε bzw. 2ε gilt

$$\lim_{x \to \varepsilon} h(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 2\varepsilon} h(x) = \infty$$

somit gilt für die Verkettung

$$\lim_{\|x\| \to \varepsilon} g \circ h(x) = 1 \qquad \lim_{\|x\| \to 2\varepsilon} g \circ h(x) = 0$$

Die stetige Fortsetzung der Funktion erfüllt die Voraussetzungen.

d) **Vor:** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitzstetig.

Beh: $(\phi \cdot f)(x)$ global Lipschitzstetig.

Bew: Seien $x, y \in D$ aus dem Definitionsgebiet von f. Nun gibt es eine Ungebung der Null $B_{2\varepsilon}(0)$ so dass für x, y aus der Umgebung ein L existiert mit

$$\|f(y) - f(x)\| < L \|y - x\|$$

Für x, y außerhalb gilt

$$0 = \|\phi f(y) - \phi f(x)\| < L \|y - x\|$$

Für x in der Umgebung und y außerhalb kann der Funktionswert durch die supremumsnorm der Funktion abgeschätzt werden, denn

$$\|\phi f(y) - \phi f(x)\| = \|\phi f(y)\| \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|x - y\|$$

Setzt man nun

$$M := \max(\|f\|_\infty, L)$$

ist für alle x, y

$$\|f(y) - f(x)\| < L \|y - x\|$$

Aufgabe 6.3: Malen nach Zahlen

a) **Beh:** $x(t) = x_0 \cos(t) + \dot{x}_0 \sin(t)$ löst die DGL $\ddot{x} + x = 0$

Bew: Durch einsetzen Es ist für die angegeben Lösung

$$x(0) = x_0 \cos(0) + \dot{x}_0 \sin(0) = x_0$$

Für die Ableitung gilt

$$\dot{x}(0) = -x_0 \sin(0) + \dot{x}_0 \cos(0) = \dot{x}_0$$

Und es ist

$$\ddot{x}(t) = -x_0 \cos(t) - \dot{x}_0 \sin(t) = -x(t)$$

Hierbei sind alle Anfangsbedinfunen x_0 und $\dot{x}_0$ denkbar.

b) **Beh:** $x(t) = \sinh(t)$ löst die DGL $\ddot{x} = \frac{\dot{x}^2 - 1}{x}$

Bew: Durch einsetzen Es ist für die angegeben Lösung

$$\ddot{x}(t) = \sinh(t) = \frac{\sinh(t)^2}{\sinh(t)} = \frac{\cosh(t)^2 - 1}{\sinh(t)} = \frac{\dot{x}^2 - 1}{x}$$

Dabei führen nur die Anfangswerte $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$ zu dieser Lösung.

Thomas Lorenz

Übungsblatt 7 A3

Aufgabe 7.1: Phasenfluss

a) **Vor:** Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\|F'\|_\infty \leq L$ und

$$\dot{x} = F(x) \qquad x(\tau) = \xi$$

Beh: Für alle $\tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n$ ist $I(\xi, \tau) = \mathbb{R}$

Bew: Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert als

$$f(t, x) = F(x)$$

Klar ist $\left\| \frac{d}{dx} f \right\|_\infty = \|F'\|_\infty \leq L$. Somit ist f Lipschitzstetig in x und da f konstant bezüglich Veränderungen in t ist auch gleichmäßig stetig in t.
Somit gibt es für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein τ-enthaltendes Intervall I, auf dem y eindeutig definiert ist. Das maximale Existenzintervall ergibt sich als Vereinigung aller Intervalle

$$I(\xi, \tau) = \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} I = \mathbb{R}$$

b) **Vor:** ϕ sei Lösung der DGL

Beh: $\phi(t, \xi, \tau) = \phi(t - \tau, \xi, 0)$

Bew: Betrachtet man die Funktionsdifferenz

$$\phi(t, \xi, \tau) - \phi(t - \tau, \xi, 0)$$

an der Stelle $t = \tau$ so ist

$$\phi(\tau, \xi, \tau) - \phi(0, \xi, 0) = \xi - \xi = 0$$

Hier sind also die Lösungen für die Differentialgleichung gleich. Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung folgt die Behauptung.

Aufgabe 7.2: Eisenbahn

a) **Vor:** Sei $f(v) := \alpha + \beta v^2$ die Reibungskraft auf eine Lokomotive

Beh: Es ist $v = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} \tan\left(\arctan\left(\frac{\beta v_0}{\sqrt{\alpha\beta}}\right) - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{m} t\right)$

Bew: Nach der Mechanik gilt

$$m\dot{v} = \dot{p} = -f = -\alpha - \beta v^2$$

Umstellen der Gleichung liefert

$$m \frac{dv}{dt} \frac{1}{\alpha + \beta v^2} = -1$$

Integration beider Seiten liefert nun

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{1}{\alpha+\beta v^2}dv=-\int_0^t 1dt=-t$$

Somit ist

$$-t=m\left[\frac{\arctan\left(\frac{\beta v}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)}{\sqrt{\alpha\beta}}\right]_{v_0}^{v}$$

Und umgeformt nach v

$$v=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta}\tan\left(\arctan\left(\frac{\beta v_0}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{m}t\right)$$

Gesucht ist nun die Zeit nach der der Zug zum stehen kommt also $v=0$ gilt. Die ist, wenn das Argument des Tangens Null wird. Es ergibt sich

$$t=\frac{m}{\sqrt{\alpha\beta}}\arctan\left(\frac{\beta v_0}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)$$

Für $v_0\to\infty$ ergibt sich so eine Bremszeit von

$$t=\frac{m\pi}{2\sqrt{\alpha\beta}}$$

b) **Beh:** Nach der Zeit t hat sie so eine Strecke von $s=\frac{m}{\beta}\ln\left(1+\left(\frac{\beta v_0}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)^2\right)$ zurückgelegt

Bew: Für die zurückgelegte Strecke gilt

$$s=\int_0^t v\,dt$$

die gesamte zurückgelegte Strecke ergibt sich so

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{t_{max}} v\,dt=\int_0^{t_{max}}\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta}\tan\left(\arctan\left(\frac{\beta v_0}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{m}t\right)dt\\
&= \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta}\frac{m}{2\sqrt{\alpha\beta}}\left[\ln\left(1+\tan\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{m}t-\arctan\left(\frac{\beta v_0}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)\right)^2\right)\right]_0^{t_max}\\
&= \frac{m}{\beta}\ln\left(1+\left(\frac{\beta v_0}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.3: Eisenbahn

Beh:

$$z=\frac{m^2}{\beta^2}\left(g+\frac{\beta}{m}\dot{z}_0\right)\left(e^{\frac{\beta}{m}(t_0-t)}-1\right)-\frac{m}{\beta}g(t-t_0)+z_0$$

Bew: Es ist

$$\frac{d}{dt}\dot{z}\frac{1}{g+\frac{\beta}{m}\dot{z}} = -1$$

Die Integration beider Seiten über t liefert so

$$\frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{g+\frac{\beta}{m}\dot{z}}{g+\frac{\beta}{m}\dot{z}_0}\right) = t_0 - t$$

Auflösen nach $\dot{z}$ liefert nun

$$\dot{z} = \frac{m}{\beta}\left(g+\frac{\beta}{m}\dot{z}_0\right)e^{\frac{\beta}{m}(t_0-t)} - \frac{m}{\beta}g$$

Wiederholtes Integrieren liefert nun

$$z - z_0 = \frac{m^2}{\beta^2}\left(g+\frac{\beta}{m}\dot{z}_0\right)\left(e^{\frac{\beta}{m}(t_0-t)} - 1\right) - \frac{m}{\beta}g(t-t_0)$$

Woraus die Behauptung folgt

Thomas Lorenz

Übungsblatt 8 A3

Aufgabe 8.1: Exakte Differentialgleichungen

Vor: Sei $\partial_1 F = P$ und $\partial_2 F = Q$

Beh: Notwendige Bedingung für die Existenz von F ist $\partial_1 Q = \partial_2 P$

Bew: Sind P und Q nach den Voraussetzungen partiell differenzierbar, so gilt

$$\partial_1 Q = \partial_1 \partial_2 F = \partial_2 \partial_1 F = \partial_2 P$$

Die Funktion F ist dann eindeutig bestimmt.

a) **Beh:** Die Differentialgleichung $(\cos(y) + 2gy)g' + (g^2 - y - g\sin(y)) = 0$ ist exakt.

Bew: Es gilt

$$\partial_y(\cos(y) + 2gy) = -\sin(y) + 2g$$

und

$$\partial_h(g^2 - y - g\sin(y)) = 2g + \sin(y)$$

Somit ist die Differentialgleichung exakt, und es gilt

$$\partial_1 F = g^2 - y - g\sin(y)$$

Man erhällt F nun durch Integrieren der ersten Variable

$$F(y, g) = g^2 y - \frac{1}{2}y^2 + g\cos(y) + F(0, g)$$

Somit ist

$$g_{1/2} = \frac{-cos(y) \pm \sqrt{\cos(y)^2 + 2y^3 - 4yF(0, g)}}{2y}$$

b) **Beh:** Die Differentialgleichung $\frac{1}{y\sqrt{1-g^2}}g' - \frac{\arcsin(g)}{y^2} - \frac{y}{1-y^2} = 0$ ist exakt.

Bew: Betrachten man die Ableitung

$$\partial_y \frac{1}{y\sqrt{1-g^2}} = -\frac{1}{y^2\sqrt{1-g^2}}$$

und

$$\partial_g - \frac{\arcsin(g)}{y^2} = -\frac{1}{y^2\sqrt{1-g^2}}$$

so folgt die Exaktheit. Für F gilt so

$$\partial_1 F = -\frac{\arcsin(g)}{y^2} - \frac{y}{1-y^2}$$

und damit

$$F(x,g) - F(0,g) = \int -\frac{\arcsin(g)}{y^2} - \frac{y}{1-y^2} dy = \frac{\arcsin(g)}{y} + \frac{1}{2}\ln(y^2-1)$$

Mit der Bedingung $F(x,g) = 0$ folgt daraus

$$g(x) = \sin\left(-\frac{1}{2}\ln(y^2-1)y - F(0,g)y\right)$$

c) **Beh:** Die Differentialgleichung $3x^2 + 2xf + 1 + 2x^2 f\, f' = 0$ ist nicht exakt.

Bew: Da

$$\partial_f(3x^2 + 2xf + 1) = 2x$$

und

$$\partial_x 2x^2 f = 4xf$$

folgt, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.

Aufgabe 8.1: Exakte Differentialgleichungen

a) Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \lambda t x(t)^2$$

lässt sich mit einer Funktion F schreiben als

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), \lambda) \qquad F(t, x(t), \lambda) = \lambda t x(t)^2$$

b) Durch Separation der Variablen kann die Differentialgleichung gelöst werden. Dabei gilt

$$\int_\xi^x \frac{1}{x^2} dx = \int_\tau^t \lambda t\, dt$$

Lösen der Integrale und auflösen nach x liefert dann

$$x(t) = -\frac{2\xi}{\lambda\, t^2 \xi - 2 - \lambda\, \tau^2 \xi}$$

Der Phasenfluss ϕ ist demnach

$$\phi(t, \xi, \tau, \lambda) = -\frac{2\xi}{\lambda\, t^2 \xi - 2 - \lambda\, \tau^2 \xi}$$

Thomas Lorenz

Übungsblatt 9 A3

Aufgabe 9.1: Komplexe Zahlen

a) Im Folgenden sei $x \in \mathbb{R}$

Beh:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Bew: Mit der Reihendarstellung folgt

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i\,(i^2)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos(x) + i\sin(x)
\end{aligned}$$

Beh: (i.2)

$$\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$$

Bew: Es ist

$$\overline{e^{ik}} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{ix})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ix)^k}{k!} = e^{-ik}$$

Beh: (i.1)

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Bew:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$$

Beh: (i.3)

$$e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$$

Bew: Es gilt die Äquivalennzkette

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 \\
\Leftrightarrow \cos(x) + i\sin(x) &= 1 \\
\Leftrightarrow x &\in \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Beh: (ii)

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \qquad \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Bew: Es ist

$$\cos(x) = \Re e^{ix} = \frac{1}{2}(e^{ix} + \overline{e^{ix}}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \sin(x) &= -(\cos(x))' = -\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})' = \frac{-i}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

da für i gilt

$$i = \frac{i \cdot i}{i} = -\frac{1}{i}$$

Beh: (ii)

$$\cosh(x) = \cos(ix) \qquad \sinh(x) = -i\sin(x)$$

Bew: Es ist

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{-i \cdot ix} + e^{i \cdot ix}) = \cos(ix) \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \frac{-i}{2i}(-e^{-i \cdot ix} + e^{i \cdot ix}) = -i\sin(ix) \end{aligned}$$

b) **Vor:** Seien $x, a \in \mathbb{C}$

Beh: Dann besitzt die Gleichung $x^2 = a$ zwei Lösungen in $\mathbb{C}$.

Bew: Die Gleichung ergibt sich als

$$z^2 = a = |a|\, e^{i\varphi} \qquad \Re(a) = |a|\cos(\varphi)$$

Das ziehen der Wurzel liefert so

$$\begin{aligned} z &= \pm |a|\, e^{\frac{i\varphi}{2}} = \pm\sqrt{|a|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \\ &= \pm\sqrt{|a|}\left(\sqrt{\frac{1+\cos(\varphi)}{2}} + i(\operatorname{sgn}(\Im(a) - \Re(a)))\sqrt{\frac{1-\cos(\varphi)}{2}}\right) \\ &= \pm\frac{|a|}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{|a| + \Re(a)} + i(\operatorname{sgn}(\Im(a) - \Re(a)))\sqrt{|a| - \Re(a)}\right) \end{aligned}$$

Es können demnach 2 komplexe Lösungen gefunden werden.

c) Die Lösungen der Quadratischen Gleichung $z^2 = -1$ sind i und $-i$. Einsetzen liefert

$$i^2 = i \cdot i = -1 \qquad (-i)^2 = (-1)^2 \cdot (i^2) = -1$$

Vorsicht ist geboten beim Radifizieren und Potenzieren, denn auch im Reelen ist

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|}^2 = |x| \neq x$$

Es ist demnach

$$1 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{|-1|}^2 = 1$$

Aufgabe 9.2: Jordan-Normalform
Sei die Matrix A wie auf dem Blatt gegeen. Als erstes werden die Eigenwerte der Matrix berechnet.

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

Die doppelte Nullstelle $\lambda = -1$ liefert dann neben dem Nullvektor den Eigenvektoren:

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Jordan-Normalform der Matrix A ergibt sich demnach als

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie die Transformationsmatrix Q als

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Exponentialfunktionsmatrize ergibt sich dann als

$$e^A = Qe^J Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2\,e^{-1} & e^{-1} \\ -e^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Thomas Lorenz

Übungsblatt 10 A3

Aufgabe 10.1: Variation der Konstanten

a) **Vor:** Sei für $y \in \mathbb{R}^n$ eine Differentialgleichung durch

$$y'(t) = A(t) \cdot y(t) + b(t)$$

gegeben. Hierbei sei $A(t) \in M(n,n)$ und $b(t) \in \mathbb{R}^n$

Beh:

$$y(t) = Z(t)d + y_p(t)$$

mit $Z(t)$ Fundamentalmatrix des homogenen Systems, $d \in \mathbb{R}^n$ $y'(t)+A(t)\cdot y(t) = 0$ und

$$y_p(t) = Z(t)c(t) \qquad c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} Z^{-1}(s)b(s)ds.$$

löst die Differentialgleichung.

Bew: Betrachtet man die homogene Differentialgleichung

$$y'(t) + A(t) \cdot y(t) = 0$$

so können im Allgemeinen n linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichhung $(y_1, ..., y_n)$ gefunden werden. Diese bilden ein Fundamentalsystem und die Spalten einer Fundamentalmatrix Z. Nun ist für alle $d \in \mathbb{R}^n$

$$y_h(t) = Z(t) \cdot d$$

Eine Lösung des homogenen Systems. Gesucht ist nun eine Lösung des Inhomogenen Problems. Der Ansatz der Separation der Variablen

$$y_p(t) = Z(t) \cdot c(t)$$

liefert, nach t differenziert:

$$\begin{aligned} y'(t) &= (Z(t) \cdot c(t))' = Z'(t) \cdot c(t) + Z(t) \cdot c'(t) \\ &= A(t) \cdot Z(t) \cdot c(t) + Z(t) \cdot c'(t) = A(t) \cdot y_h(t) + Z(t) \cdot c'(t) \end{aligned}$$

Hierzu wurde benutzt, dass Z eine Lösung der Differentialgleichung $Z' = A \cdot Z$ ist. Die Differentialgleichung wird also gelöst. wenn

$$b(t) = Z(t) \cdot c'(t)$$

ist. Dies ist Äquivalent zu

$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} Z^{-1}(s)b(s)ds$$

Was zu zeigen war.

b) **Vor:** Für $0 < \epsilon < 1$ sei

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Bew: Die Lösung des homogenen Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

ist durch

$$\dot{x} = \exp(A\,t) \cdot d$$

mit $d \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Für die Berechnung der Matrixexponentialfunktion sind die Eigenwerte der Matrix A benötigt. Diese ergeben sich durch

$$(1-\lambda)^2 - \epsilon = 0 \qquad \lambda = 1 \pm \sqrt{\epsilon}$$

Mit den Eigenwerten können die Eigenvektoren sowie die Transformationsmatrix S der Matrix A bestimmt werden. Es ist

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hiermit ist

$$Z(t) = \exp(At) = S^{-1} \exp \begin{pmatrix} (1+\sqrt{\epsilon})t & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{\epsilon})t \end{pmatrix} S = e^t \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{\epsilon}t) & \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sinh(\sqrt{\epsilon}t) \\ \sqrt{\epsilon}\sinh(\sqrt{\epsilon}t) & \cosh(\sqrt{\epsilon}t) \end{pmatrix}$$

Das Inverse der Matrix $Z(t)$ ergibt sich hier als

$$Z^{-1}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{\epsilon}t) & -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sinh(\sqrt{\epsilon}t) \\ -\sqrt{\epsilon}\sinh(\sqrt{\epsilon}t) & \cosh(\sqrt{\epsilon}t) \end{pmatrix}$$

Für das Matrix-Vektorprodukt von Z mit dem Vektor $(t, t^2)^T$ gilt

$$Z^{-1}(t) \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\left(-\cosh\left(t\sqrt{\epsilon}\right)\sqrt{\epsilon} + \sinh\left(t\sqrt{\epsilon}\right)t\right)te^{-t}}{\sqrt{\epsilon}} \\ t\left(-\sqrt{\epsilon}\sinh\left(t\sqrt{\epsilon}\right) + \cosh\left(t\sqrt{\epsilon}\right)t\right)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Für gegebenes ϵ könnte so eine Lösung gefunden werden. Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ ergibt sich

$$y = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ t^2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

Für den Fall $\epsilon = 0$ kann

$$x(t) = \exp(At)d = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} d$$

mit $d \in \mathbb{R}^2$ direkt berechnet werden. Das Inverse ergibt sich hier als

$$\exp(At)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

so dass

$$c - c_0 = \int \begin{pmatrix} (t - t^3)e^{-t} \\ t^2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5 + 5t + 3t^2 + t^3)e^{-t} \\ -(2 + 2 * t + t^2)e^{-t} \end{pmatrix}$$

und die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$x = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} (5 + 5t + 3t^2 + t^3)e^{-t} \\ -(2 + 2t + t^2)e^{-t} \end{pmatrix}$$

mit $d \in \mathbb{R}^2$

Thomas Lorenz

Übungsblatt 11 A3

Aufgabe 11.1: Nicht ganz (Ge)dicht, oder was...

Più via più di meno fa più di meno,	$1 \cdot i$	$=$	i
Meno via più di meno fa meno di meno,	$(-1) \cdot i$	$=$	$-i$
Più via meno di meno fa più di meno,	$1 \cdot (-i)$	$\neq$	i
Meno via meno di meno fa più di meno,	$(-1) \cdot (-i)$	$=$	i
Più di meno via più di meno fa meno,	$i \cdot i$	$=$	-1
Più di meno via meno di meno fa più,	$i \cdot (-i)$	$=$	1
Meno di meno via più di meno fa più,	$(-i) \cdot i$	$=$	1
Meno di meno via meno di meno fa meno.	$(-i) \cdot (-i)$	$=$	-1

Aufgabe 11.2: Komplexe Differenzierbarkeit

a) **Beh:** $f(z) = \overline{z}^3 z^4 + \overline{z}^4 z^3$ ist in $z = 0$ komplex differenzierbar

Bew: Es ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \overline{z}^3 z^4 + \overline{z}^4 z^3 = \overline{z}^3 z^4 + \overline{\overline{z}^3 z^4} \\ &= 2\Re(\overline{z}^3 z^4) = 2\Re((\overline{z}z)^3 z) = 2\Re(z)(\Re(z)^2 + \Im(z)^2)^3 \end{aligned}$$

Nach den Cauchy-Riemanschen Differentialgleichung muss, damit f komplex differenzierbar ist,

$$\frac{\partial}{\partial \Re(z)} \Re(f) = \frac{\partial}{\partial \Im(z)} \Im(z) = 0$$

was nur an der Stelle $\Re(z) = \Im(z) = 0$ erfüllt ist. Hier gilt dann ebenso

$$0 = \frac{\partial}{\partial \Im(z)} \Re(f) = -\frac{\partial}{\partial \Re(z)} \Im(z) = 0$$

Aufgabe 11.3: Holomorphe Funktionen Im Folgenden sei $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

a) **Beh:** $f(G) \subset \mathbb{R} \Rightarrow f$ konstant

Bew: Für ein $z \in G$ folgt mit den Cauchy-Riemanschen DGLS in diesem Fall

$$\frac{\partial}{\partial \Re(z)} \Re(f) = \frac{\partial}{\partial \Im(z)} 0 = 0$$

und ebenso

$$\frac{\partial}{\partial \Im(z)} \Re(f) = -\frac{\partial}{\partial \Re(z)} 0 = 0$$

Nur konstante Funktionen erfüllen diese Gleichungen.

b) **Beh:** $f(G) \subset \partial B_1(0) \Rightarrow f$ konstant

Bew: Betrachtet man für ein $z = x + iy$ den Realtei und Imaginärteil der Funktion f mit $f = u + iv$ so folgt aus $f(G) \subset \partial B_1(0)$:

$$u^2 + v^2 = 1$$

Differenzieren nach x und y liefert hieraus

$$u\partial_x u + v\partial_x v = 0 = u\partial_y u + v\partial_y v$$

Nun ist mit den CR-DGL und der rechten Seite der Gleichung

$$u\partial_x v = -u\partial_y u = v\partial_y v = v\partial_x u$$

Mit der linken Seite der Gleichung ist nun

$$0 = u^2\partial_x u + uv\partial_x v = (u2 + v2)\partial_x u = \partial_x u$$

Analog ergibt sich

$$\partial_x v = 0$$

Hieraus folgt die Konstanz der Funktion f

c) **Beh:** $\Re(f)$ und $\Im(f)$ linear abhängig $\Rightarrow f$ konstant

Bew: Sind Real- und Imaginärteil linear abhängig, so gibt es eine Konstante α, so dass

$$u = \alpha v$$

Nun ist

$$\partial_x u = \partial_x(\alpha v) = \alpha\partial_x v \qquad \partial_y u = \partial_y(\alpha v) = \alpha\partial_y v$$

Mit den CR-DGL folgt nun

$$\partial_x u = \partial_y u = 0$$

und somit die Konstant der Funktion f

Thomas Lorenz

Übungsblatt 12 A3

Aufgabe 12.1: Wegintegrale im Komplexen

1. Sei die Parametrisierung einer Kurve γ im Komplexen gegeben durch

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \gamma(t) := c + t(z - c)$$

nun ist das Integral

$$\begin{aligned} \int_{[c,w]} f(c) d\zeta &= \int_0^1 f(c)\gamma'(t)dt \\ &= f(c)(z-c)\int_0^1 1dt = f(c)(z-c) \end{aligned}$$

2. Die Parametriserung eines Dreiecks mit den Eckpunkten x_1, x_2 und x_3 ist nun als zusammengesetze Kurve aus drei Geraden anzugeben. Es seien

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ \gamma_2(t) &:= x_2 + t(x_3 - x_2) \\ \gamma_3(t) &:= x_3 + t(x_1 - x_3) \end{aligned}$$

Nun gilt für die Integration über den Rand des Dreiecks

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} 1 d\zeta &= \int_{x_1}^{x_2} 1d\zeta + \int_{x_2}^{x_3} 1d\zeta + \int_{x_3}^{x_1} 1d\zeta \\ &= \int_0^1 \gamma_1' dt + \int_0^1 \gamma_2' dt + \int_0^1 \gamma_3' dt \\ &= x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_1 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

3. Sei nun eine Komplexe Funktion $f(z) := c - z$ definiert. Nun ist das Intergal der Funktion über den Rand eins Dreiecks gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta &= \int_{x_1}^{x_2} f(\zeta)d\zeta + \int_{x_2}^{x_3} f(\zeta)d\zeta + \int_{x_3}^{x_1} f(\zeta)d\zeta \\ &= \int_0^1 f(\gamma_1)\gamma_1' dt + \int_0^1 f(\gamma_2)\gamma_2' dt + \int_0^1 f(\gamma_3)\gamma_3' dt \\ &= \int_0^1 (c - x_1 - t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)dt + \int_0^1 (c - x_2 - t(x_3 - x_2))(x_3 - x_2)dt \\ &\quad + \int_0^1 (c - x_3 - t(x_1 - x_3))(x_1 - x_3)dt \\ &= (c - x_1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) + (c - x_2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2))(x_3 - x_2) \\ &\quad +(c - x_3 - \frac{1}{2}(x_1 - x_3))(x_1 - x_3) \\ &= ... = 0 \end{aligned}$$

Was zu zeigen war.

Aufgabe 12.2: Goursat

a) Das Integrallemma von Goursat lässt sich ebenfalls für Vierecke, oder allgemeiner Paralellogramme beweisen. Allerdings bietet das Dreieck, als geometrisch einfachste Figur, die beste Möglichkeit allgemeine Gebiete zu approximieren.

b) Im Beweis des Lemmas wird das Dreiecksgebiet so eingeschränkt, dass der nicht holomorphe Punkt als Grenzwert einer Intervallschachtelung auftaucht, deren Volumen vernachlässigt werden kann. Iterativ angewendet könnten die Voraussetzungen des Satzes durch
$f : D \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf endlich viele Punkte $c_i \in D$
gelockert werden. Der Beweis wäre eine iterative Anwendung der angewandten Strategie.

Aufgabe 12.3: Integralsatz von Cauchy
Der Integralsatz von Cauchy ist mit der Darstellung eines Vektorfeldes als Gradient einer skalaren Funktion vergleichbar. Dies ist dann möglich, wenn die Rotation eines Vekorfeldes verschwindet. Dieses wird durch die Forderung der Holomorphie einer Funktion im Definitionsgebiet dargestellt.
Mit Hilfe des Stokeschen Satzes kann nun gezeigt werden, dass das Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve im Definitionsgebiet verschwindet.