Übungsblatt 2 A2

Aufgabe 1: Landausche Ungleichung

Vor: Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar; $M_j := \{\sup(|f^{(j)}| : x > 0)\} \quad j \in \{0, 1, 2\}$

Beh: $M_1^2 \leq 4M_0M_2$

Bew: Es ist $f(x+h)$ an der Stelle x:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)(x+h-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(x+h-x)^2 \qquad \xi \in (x; x+h) \\
&= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \\
\Leftrightarrow f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h \\
\Rightarrow \left|f'(x)\right| &\leq \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h\right| \leq \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| + \left|\frac{f''(\xi)}{2}h\right|
\end{aligned}$$

Setzte x_0 so dass $f(x_0) = sup\{f(x) : x > 0\}$

$$\begin{aligned}
M_1 &= |f'(x_0)| \leq \left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right| + \left|\frac{f''(\xi)}{2}h\right| \\
&\leq \frac{|f(x+h)| + |f(x)|}{|h|} + \left|\frac{f''(\xi)}{2}h\right| \\
&\leq \frac{2M_0}{|h|} + \frac{M_2}{2}|h| \\
\left(\text{Setze: } h = \frac{2\sqrt{M_0M_2}}{M_2}\right) &= \frac{2M_0M_2}{2\sqrt{M_0M_2}} + \frac{2M_2\sqrt{M_0M_2}}{2M_2} \\
&= \sqrt{M_0M_2} + \sqrt{M_0M_2} \\
\Rightarrow M_1^2 &\leq (\sqrt{M_0M_2} + \sqrt{M_0M_2})^2 = M_0M_2 + 2M_0M_2 + M_0M_2 \\
&= 4M_0M_2 \qquad \Box
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Integralrechnung mit Riemann-Summen

a) **Vor:** Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$
Beh:

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

Bew: Für das Integral $\int_0^a x^p dx$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^p dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a\,k}{n}\right)^p \left(\frac{a\,k}{n} - \frac{a\,(k-1)}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^{p+1} \sum_{k=1}^{n} k^p \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^{p+1} \left(\frac{n^{p+1}}{p+1} + c_{n-1}n^p + \ldots + c_1 n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^{p+1}}{p+1}\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c_{n-1}a^{p+1}}{n} + \ldots + \frac{c_1 a^{p+1}}{n^p}\right) \\
&= \frac{a^{p+1}}{p+1} + 0
\end{aligned}$$

Nun gilt für das Integral$\int_a^b x^p dp$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^p dx &= \int_0^b x^p dx - \int_0^a x^p dx \\
&= \frac{b^{p+1}}{p+1} - \frac{a^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} \qquad \square
\end{aligned}$$

b) **Vor:** Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $x_k := a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}$

Beh:

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

Bew: Bei einer geometrischen Zerlegung gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^p dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} {x_k}^p (x_k - x_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}\right)^p \left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}} - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}\right)^{p+1} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} a^{p+1} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}\right) \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}\right)^k \\
&= \lim_{n\to\infty} a^{p+1} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}\right) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}(n+1)} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}} - 1} \\
&\overset{*}{=} a^{p+1} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^p b - a}{ap + a}
\end{aligned}$$

*: Numerische Lösung mit Maple

Aufgabe 3: Taylorformel mit Integralrestglied

Vor: Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in I $(n+1)$ mal differenzierbar; $x_0, x \in I$

Beh:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - \xi) f^{(n+1)}(\xi) d\xi$$

Bew: Induktion über n

Es sei $T_n(x, a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ und $R_n(x, a) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

IV Es sei $n = 0$. Dann ist nach dem Hauptsatz der Integralrechnung:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

IA Es sei n beliebig, aber fest. Damit ist:

$$f(x) = T_n(x, a) + R_n(x; a)$$

IS Betrachtet man die Funktion

$$F(t) = \frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1!)} f^{(n+1)}(t)$$

Leitet man diese Funktion ab und integriert sie danach von a bis x

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+2)}(t) - \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)(t)} \\
\Rightarrow -F(a) &= F(x) - F(a) = \int_a^x F(t) dt \\
&= \int_a^x \frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+2)}(t) dt - \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)(t)} \\
&= R_{n+1}(x; a) - R_n(x; a) \\
\Rightarrow f(x) &= T_n(x; a) + F(a) + F_{n+1}(x; a) \\
&= T_{n+1}(x; a) + R_{n+1}(x; a) \qquad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Konvexe Funktionen

a) **Vor:** Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in I$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$

Beh:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Bew: Induktion über n

IV Sei $n = 1$

$$f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$$

mit $\lambda = 1$ klar.

IA Es sei

$$f\left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k f(x_k)$$

IS Es ist

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x_k\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k x_k + \lambda_n x_n\right) \\
&= f\left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k x_k + \left(1-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\right) x_n\right) \\
&\overset{IA}{\leq} \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k f(x_k) + \left(1-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\right) f(x_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k f(x_k) + \lambda_n f(x_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k) \qquad \square
\end{aligned}$$

b) **Vor:** Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, $x_1, x_2, x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$

Beh: f konvex $\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Bew: Setzte

$$\lambda = \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
f(x_2) &= f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \\
&\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3) \\
&= \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}f(x_1) + f(x_2) - \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}f(x_3) \\
\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_3) &\leq \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}(f(x_1)-f(x_3)) \\
\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} &\geq \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} \\
\Leftrightarrow \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_1-x_1} &\leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}
\end{aligned}$$

Analog kann der erste Teil gezeigt werden $\square$

c) **Vor:** Sei $f : I \to \mathbb{R}$, zweimal differenzierbar auf I, $f''(x) \geq 0$

Beh: f konvex

Bew: Aus $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$ folgt, dass $'(x)$ streng monoton steigend ist.
Also gilt für alle x_1, x_2, x_3 mit $x_1 < x_2 < x_3$:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$\Leftrightarrow f$ konvex $\square$

Übungsblatt 3 A2

Aufgabe 1: Einfache Integralrechung

a) i) **Beh:**

$$\int \cos^2(x)\sin(x)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]$$

Bew:

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\sin(x)dx &= -\frac{1}{3}\int 3\cos^2(x)(-\sin(x))dx \\ &= -\frac{1}{3}\int (\cos^3(x))'dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\right] \qquad \square\end{aligned}$$

ii) **Beh:**

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \pi$$

Bew:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx &= \int^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2x))dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}dx - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos(2x)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{2\pi} \\ &= \pi - (0-0) = \pi \qquad \square\end{aligned}$$

iii) **Beh:**

$$\int \left[3\sin(x) - 4\sin^3(x)\right] dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]$$

Bew:

$$\begin{aligned}\int \left[3\sin(x) - 4\sin^3(x)\right] dx &= \int \sin(3x)dx \\ &= -\frac{1}{3}\int -3\sin(3x)dx \\ &= -\frac{1}{3}\int (\cos(3x))'dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right] \qquad \square\end{aligned}$$

iv) **Beh:**

$$\int_{-9}^{9}\left[2x^7+\frac{2}{3}x^3-\frac{8}{3}\right]dx=-48$$

Bew:

$$\begin{aligned}\int_{-9}^{9}\left[2x^7+\frac{2}{3}x^3-\frac{8}{3}\right]dx &= 2\int_{-9}^{9}x^7dx+\frac{2}{3}\int_{-9}^{9}x^3dx-\frac{8}{3}\int_{-9}^{9}dx\\ &= \left[\frac{1}{4}x^8\right]_{-9}^{9}+\left[\frac{1}{6}x^4\right]_{-9}^{9}-\left[\frac{8}{3}x\right]_{-9}^{9}\\ &= 0+0-48=-48 \qquad \square\end{aligned}$$

v) **Beh:**

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}x^3\left(e^x+e^{-x}\right)dx=0$$

Bew:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}x^3\left(e^x+e^{-x}\right)dx &= \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}2x^3\cosh(x)dx\\ &= \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}2x^3(\sinh(x))'dx\\ &= \left[2x^3\sinh(x)\right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}-\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}6x^2\sinh(x)dx\\ &= 0-\left[6x^2\cosh(x)\right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}+\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}12x\cosh(x)dx\\ &= -0+\left[12x\sinh(x)\right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}+\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}12\sinh(x)dx\\ &= \left[12\cosh(x)\right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}=0 \qquad \square\end{aligned}$$

vi) **Beh:**

$$\int a^x dx=\left[\frac{a^x}{\ln(a)}\right]$$

Bew:

$$\begin{aligned}\int a^x dx &= \int e^{\ln(a^x)}=\int e^{x\ln(a)}\\ &= \int\frac{1}{\ln(a)}\ln(a)e^{x\ln(a)}=\left[\frac{1}{\ln(a)}e^{x\ln(a)}\right]\\ &= \left[\frac{1}{\ln(a)}a^x\right] \qquad \square\end{aligned}$$

vii) **Beh:**

$$\int \sqrt{ax+b}dx = \left[\frac{2}{3a}(ax+b^{\frac{3}{2}})\right]$$

Bew:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{ax+b}dx &= \frac{1}{a}\int \underbrace{a}_{:=g'}\underbrace{\sqrt{ax+b}}_{:=f'(g)}dx \\
&= \frac{1}{a}\int \underbrace{\left(\frac{2}{3}(ax+b)^{\frac{3}{2}}\right)'}_{(f(g))'}dx \\
&= \left[\frac{2}{3a}(ax+b^{\frac{3}{2}})\right] \qquad \Box
\end{aligned}$$

viii) **Beh:**

$$\int \frac{1}{a+bx^2}dx = \left[\frac{\arctan(\sqrt{\frac{b}{a}}x)}{\sqrt{ba}}\right]$$

Bew:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a+bx^2}dx &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{ab}}\int \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{ab}}\int \left(\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)\right)' dx \\
&= \left[\frac{\arctan(\sqrt{\frac{b}{a}}x)}{\sqrt{ba}}\right] \qquad \Box
\end{aligned}$$

ix) **Beh:**

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \left[\frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2}\right]$$

Bew:

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\sin(bx)dx &= \frac{1}{a^2+b^2}\int (a^2+b^2)e^{ax}\sin(bx)dx \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\int a^2e^{ax}\sin(bx) + b^2e^{ax}\sin(bx)dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2+b^2}\int a^2e^{ax}\sin(bx) + abe^{ax}cos(bx)\dots \\
&\quad -abe^{ax}cos(bx) + b^2e^{ax}\sin(bx)dx \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left(\int \underbrace{a^2e^{ax}}_{f'}\underbrace{\sin(bx)}_{g} + \underbrace{abe^{ax}}_{f}\underbrace{cos(bx)}_{g'}dx\dots\right. \\
&\quad \left. -\int abe^{ax}cos(bx) - b^2e^{ax}\sin(bx)dx\right) \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left(\int \underbrace{(ae^{ax}\sin(bx))'}_{(fg)'}dx - \int (be^{ax}sin(bx))'dx\right) \\
&= \left[\frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2}\right] \qquad \square
\end{aligned}
$$

x) **Beh:**

$$\int \frac{1}{x + x\ln(x)}dx = [\arctan(\ln(x))]$$

Bew:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x + x\ln(x)}dx &= \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\underbrace{\frac{1}{1+\ln(x)}}_{f'(g)}dx \\
&= \int (\arctan(\ln(x)))'dx \\
&= [\arctan(\ln(x))] \qquad \square
\end{aligned}
$$

xi) **Beh:**

$$\int \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}dx = [\ln(xe^x + 1) - x]$$

Bew:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}dx &= \int \frac{e^x + xe^x - (xe^x + 1)}{xe^x + 1}dx \\
&= \int \frac{e^x + xe^x}{xe^x + 1} - \frac{xe^x + 1}{xe^x + 1}dx \\
&= \int \frac{(xe^x + 1)'}{xe^x + 1} - 1dx \\
&= [\ln(xe^x + 1) - x] \qquad \square
\end{aligned}
$$

b) Um das Integral $\int_a^b f(x)dx$ in ein Inegral über das Einheitsintervall $[0,1]$ zu überführen, wird eine lineare Funktion $g : [a,b] \to [0,1]$ benötigt, mit $g(0) = a$ und $g(1) = b$. Falls $a \neq b$ wählt man für $g(t)$:

$$g(x) : x \longmapsto (b-a)x + a$$

Die Funktion $g(t)$ ist somit linear, invertierbar und differnzierbar. Durch Ersetzen von x durch $g(t)$ im Integral und y durch $g^{-1}(u)$ in den Integralgrenzen erhält man:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))dg(t) = \int_0^1 f(g(t))dg(t)$$

Durch eine Substitution von $dg(t)$ durch $\frac{dg(t)}{dt}dt = g'(t)dt$ kann das Stieltjes-Integral in ein Riemann-Integral überführt werden. Durch die Linearität von $g(t)$ wird dabei der Wert des Integrals nicht verändert.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(g(t))dg(t) = \int_0^1 f(g(t))g'(t)dt = \int_0^1 f((b-a)t+a)(b-a)dt$$

Aufgabe 2: Beta-Funktion
Vor: Die Beta-Funktion sei für $x, y > 0$ definiert durch:

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt$$

a) Die Definition der Beta-Funtion macht ebenfalls für x oder $y \in (0,1)$ Sinn. Dabei ist zu beachten, dass die Exponenten $x-1$ oder $y-1$ negativ werden und somit die nicht die Funktion t^{x-1} sondern die Funktion $\frac{1}{t^{1-x}}$ integriert wird. Analog dazu gilt entsprechendes für $0 < y < 1$.
Geht nun einer der beiden Parameter gegen 1 ergibt sich ebenfalls kein Problem, da für festes x gilt:

$$\lim_{y \to 1} B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}dt$$

Dieses Integral besitzt für jedes feste $x > 0$ einen Wert. Analog dazu für ein festes y Ein Problem entsteht erst, wenn einer der beiden Werte gegen 0 strebt, da hier das Integral keine Wert in $\mathbb{R}$. Betrachtet man dazu die Funktion $B(x,1)$ ist es klar:

$$\lim_{x \to 0} B(x,1) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t}dt = \infty \qquad \text{da } \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

b) **Beh:** Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

Bew: Induktion über m, $n \in \mathbb{N}$ beliebig

IV Für $m = 1$

$$\begin{aligned} B(1,n) &= \int_0^1 (1-t)^{n-1}dt \\ &= -\frac{1}{n}\int_0^1 ((1-t)^n)'\,dt \\ &= -\frac{1}{n}\left[(1-t)^n\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n} = \frac{1!(n-1)!}{n(n-1)!} \\ &= \frac{1!(n-1)!}{(1+n-1)!} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

IA Es sei $B(m,n+1) = \frac{(m-1)!n!}{(m+n)!}$ für $m,n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.
IS

$$\begin{aligned}
B(n+1,n) &= \int_0^1 t^m (1-t)^{n-t} dt \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{n} \left((1-t)^n\right)' t^m dt \\
&= \left[-\frac{1}{n}(1-t)^n t^m\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{n}(1-t)^n m t^{m-1} dt \\
&= 0 + \frac{m}{n} \int_0^1 (1-t)^n t^{m-1} dt \\
&= \frac{m}{n} B(m,n+1) \\
(IA) &= \frac{m}{n} \frac{(m-1)!n!}{(m+n)!} \\
&= \frac{m!(n-1)!}{((m+1)+n-1)!} \qquad \square
\end{aligned}$$

c) i) **Beh:**

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\Theta)^{2x-1} \cos(\theta)^{2y-1} d\theta$$

Bew: Setze $t = \sin^2(\theta)$
$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} t = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ und $\theta = \arcsin(\sqrt{t})$. Nun ist:

$$\begin{aligned}
D(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\
&= \int_{\arcsin(\sqrt{0})}^{\arcsin(\sqrt{1})} \sin^2(\theta)^{x-1}(1-\sin^2(\theta))^{y-1} 2\sin(\theta)\cos(\theta) d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2(x-1)} \cos(\theta)^{2(y-1)} \sin(\theta)\cos(\theta) d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2x-1} \cos(\theta)^{2y-1} d\theta \qquad \square
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Umformung der Betafunktion lässt sich $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ einfacher bestimmen. Es gilt:

$$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^0 \cos(\theta)^0 d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$$

ii) **Beh:**

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}} d\tau$$

Bew: Setze $t = \frac{\tau}{1+\tau}$
$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}t = \frac{1}{(1+\tau)^2}$ und $\tau = \frac{t}{1-t}$. Nun ist:

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{x-1}\left(1-\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)\right)^{y-1}\frac{1}{(1+\tau)^2}d\tau \\ &= \int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x-1}}\frac{1}{(1+\tau)^{y-1}}\frac{1}{(1+\tau)^2}d\tau \\ &= \int_0^\infty \frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}}d\tau \qquad \Box \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Hölder- und Minkowski-Ungleichung

a) **Vor:** Seien $u, v > 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Beh:

$$uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Bew: Nach Aufgabe 2.4 ist die e-Funktion eine konvexe Funktion, so dass gilt:

$$e^{\lambda r + (1-\lambda)s} \le \lambda e^r + (1-\lambda)e^s$$

Setzt man nun:

$$r := \ln(u^p) = \qquad s := \ln(v^q) = \qquad \lambda := \frac{1}{p} \Rightarrow (1-\lambda) = \frac{1}{q}$$

$$uv = e^{\ln(u)+\ln(v)} = e^{\frac{1}{p}\ln(u^p)+\frac{1}{q}\ln(v^q)} \le \frac{1}{p}e^{\ln(u^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(v^q)} = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad \Box$$

b) **Vor:** Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$
Beh:

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \le \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Bew: Es sei:

$$x := \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad y := \left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Nun gilt für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ (aus 3.3a):

$$\frac{x_k}{x}\frac{y_k}{y} \le \frac{1}{p}\frac{x_k^p}{x^p} + \frac{1}{q}\frac{y_k^q}{y^q}$$

Durch aufsummieren erhält man:

$$\frac{1}{xy}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \frac{1}{p}\frac{1}{x^p}\sum_{k=1}^{n} x_k^p + \frac{1}{q}\frac{1}{y^q}\sum_{k=1}^{n} y_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq xy = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \square$$

c) **Vor:** Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
Beh:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bew: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p &\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \\
\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \square
\end{aligned}$$

d) Beide Ungleichungen lassen sich ebenfalls für Integrale ähnlich wie für Summen beweisen. Somit sind beide Ungleichungen auch für die Integralform übertragbar.
Die Höldersche Ungleichung für Integrale:

$$\int |f(x)g(x)|dx| \leq \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Die Minkowskische Ungleichung für Integrale:

$$\left(\int |f(x)g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Thomas Lorenz Thomas Hermann - Gruppe 2

Übungsblatt 4 A2

Aufgabe 1: Rekursive Integrale

a) **Beh:**

$$\int \sin(x)^2 dx = -\frac{1}{n}\sin(x)^{n-1}\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2}dx$$

Bew:

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)^n dx &= \int \frac{n-1}{n}\sin(x)^n + \frac{1}{n} sin(x)^n dx \\
&= \int \frac{n-1}{n}\sin(x)^{n-2}\left(1-\cos(x)^2\right) + \frac{1}{n}\sin(x)^n dx \\
&= \int \frac{1}{n}\sin(x)^n dx - \int \frac{n-1}{n}\sin(x)^{n-2}\cos(x)^2 dx + \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2}dx \\
&= -\int \frac{1}{n}\sin(x)^{n-1}(-\sin(x))dx - \int \frac{n-1}{n}\sin(x)^{n-2}\cos(x)^2 dx \\
&\quad + \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2}dx \\
&= \left[-\frac{1}{n}\sin(x)^{n-1}\cos(x)\right] + \int \frac{n-1}{n}\sin(x)^{n-2}\cos(x)^2 dx \\
&\quad - \int \frac{n-1}{n}\sin(x)^{n-2}\cos(x)^2 dx + \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2}dx \\
&= -\frac{1}{n}\sin(x)^{n-1}\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2}dx \quad \square
\end{aligned}$$

b) **Vor:** $n \in \mathbb{N}$

Beh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!}\sqrt{2\pi} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bew: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}(n+1)x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}(x^{n+1})' e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \underbrace{\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} x^{n+1}(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= (n-1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}} dx
\end{aligned}$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-y}\frac{1}{\sqrt{2y}}dy + \int_{\infty}^{0} e^{-y}\left(-\frac{1}{\sqrt{2y}}\right)dy \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-y}\frac{1}{\sqrt{y}}dy \\
&= \sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\sqrt{B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{\pi} \\
\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= -\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'dx \\
&= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = -1+1=0
\end{aligned}$$

Nun eine Induktion über n:

IV Für $n=1$ wurde die Behauptung schon gezeigt. Für $n=0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi} = \frac{0!}{2^0 0!}\sqrt{2\pi}$$

IA Nun sei die Behauptung für beliebiges aber festes n wahr.

IS Hier soll nun von $n \to n+2$ gezeigt werden. Es ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = (n+1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{n}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Für ungerade n ist nach IA:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = (n+1)0 = 0 \qquad \checkmark$$

Für gerades n ist nach IA:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= (n+1)\frac{n!}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!}\sqrt{2\pi} \\
&= \frac{(n+1)!}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!}\sqrt{2\pi} \\
&= \frac{(n+2)!}{2\left(\frac{n+2}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!}\sqrt{2\pi} \\
&= \frac{(n+2)!}{2^{\frac{n+2}{2}}\left(\frac{n+2}{2}\right)!}\sqrt{2\pi} \qquad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Integralnormen

a) **Vor:**

$$f \in C([a,b]) \qquad \|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$$

Beh: $\|\cdot\|_p$ ist Norm in $C([a,b])$

Bew: Es ist zu zeigen:

I $\quad \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$

II $\quad \|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p$

III $\quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

I „$\Rightarrow$" Es sei $\|f\|_p = 0$

Annahme: Es gäbe eine Stelle $x_0 \in [a,b]$ so dass $f(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 0 &= \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \underbrace{\left(\int_a^{x_0-\varepsilon} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}_{=0} + \underbrace{\left(\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}_{>0} + \underbrace{\left(\int_{x_0+\varepsilon}^{b} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}_{=0} \\
&> 0 \qquad ↯
\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$" Es sei $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_a^b |0|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0^{\frac{1}{p}} = 0 \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_p &= \left(\int_a^b |\alpha f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\alpha|^p \int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \, \|f\|_p \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p &= \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
(3.3d) \quad &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \square
\end{aligned}$$

b) **Vor:** $\|f\|_p$ siehe oben, $q \geq p \geq 1$

Beh:

$$\|f\|_p \leq |b-a|^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_q$$

Bew: Es seien $1 < s, r \in \mathbb{R}$ so dass $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ dann ist:

$$\begin{aligned}
\left(\|f\|_p\right)^p &= \int_a^b 1 \cdot |f(x)|^p dx \\
&\leq \left(\int_a^b 1^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_a^b \cdot |f(x)|^{ps} dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= |b-a|^{\frac{1}{r}} \left(\|f\|_{ps}\right)^p \\
\Leftrightarrow \|f\|_p &\leq |b-a|^{\frac{1}{rp}} \|f\|_{ps}
\end{aligned}$$

Wähle nun $r = \frac{q}{q-p} > 1$ uns somit $s = \frac{r}{r-1} = \frac{q}{p} > 1$. Dann ist

$$\|f\|_p \leq |b-a|^{\frac{1}{rp}} \|f\|_{ps} = |b-a|^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_q \qquad \square$$

Weiter gilt für $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\,|x \in [a,b]\}$

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_a^b \|f\|_\infty^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|b-a| \, \|f\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |b-a|^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

c) **Vor:** $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$ und $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

Beh:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

Bew:

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} \|x\|_p &= \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p} \\
&= \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n \|x\|_\infty^p \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty}\right)^p} \\
&= \|x\|_\infty \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty}\right)^p} \\
(*) &= \|x\|_\infty
\end{aligned}$$

(*) Es gilt da $\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty} \leq 1$:

$$1 \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty} \right)^p \leq n$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[p]{1} \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty} \right)^p} \leq \sqrt[p]{n}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{1} \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty} \right)^p} \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{n}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty} \right)^p} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty} \right)^p} = 1$$

Aufgabe 3: Normen
Betrachtet man eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ und die Abbildung $N_E : D(N_E) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$N_E(x) := \inf\{\lambda > 0 | x \in \lambda E\}$$

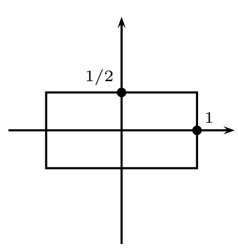
so muß die Menge E, damit sie auf dem gesamten R^n definiert ist, Vektoren jeder Richtung enthalten, das heißt für alle Vektoren im $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ muß ein $\lambda > 0$ existieren, so dass $\lambda x \in E$. Anders gesagt, die Menge E muss mindestens den Rand einer nicht leeren Menge, die eine Umgebung von Null enthält. In Formeln:

$$E \supseteq \partial E_0 \qquad \text{mit } E_0 \supset B_r(0) \text{ für ein } r > 0 \text{ bzgl. einer gültigen Metrik}$$

Allerdings stelle dann N_E keine Norm im R^n dar. Soll N_E die Eigenschaften einer Norm erfüllen so muß E mindestens den Rand, kann aber auch Vektoren aus einer Umgebung von Null enthalten.

a) Die Einheitssphäre wird von allen auf 1 normierten Vektoren gebildet. Um zu ermitteln, ob die abgebildeten Mengen die Einheitsspäre einer Norm im $\mathbb{R}^2$ bilden muß als erstes die Zuordnungsvorschrift $d(0, x) = 1$ ermittelt werden und danach die Normaxiome überprüft werden.

   1. **Vor:** Sphäre:



Beh: $\|x\| = \max\{|x_1|, 2|x_2|\}$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$

Bew: I „$\Rightarrow$“ Es sei $\|x\| = 0$

$$\Rightarrow (|x_1| = 0 \Rightarrow 2|x_2| \le 0) \text{ oder } (|x_2| = 0 \Rightarrow |x_1| \le 0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

„$\Leftarrow$“ Es sei $x = 0$

$$\Rightarrow \|x\| = \max\{|0|, 2|0|\} = 0 \qquad \checkmark$$

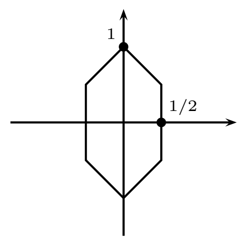
II

$$\|\alpha x\| = \max\{|\alpha x_1|, 2|\alpha x_2|\} = |\alpha| \max\{|x_1|, 2|x_2|\} = |\alpha|\|x\| \quad \checkmark$$

III

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \max\{|x_1+y_1|, 2|x_2+y_2|\} \\ &\le \max\{|x_1|+|y_1|, 2|x_2|+2|y_2|\} \\ &\le \max\{|x_1|, 2|x_2|\} + \max\{|y_1|, 2|y_2|\} \\ &= \|x\| + \|y\| \qquad \square \end{aligned}$$

2. **Vor:** Sphäre:



Beh: $\|x\| = \max\{|x_1| + |x_2|, 2|x_1|\}$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$

Bew: I „$\Rightarrow$“ Es sei $\|x\| = 0$

$$\Rightarrow (|x_1| = -|x_2| \Rightarrow 2|x_1| \le 0) \text{ oder } (2|x_1| = 0 \Rightarrow |x_1| + |x_2| \le 0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

„$\Leftarrow$“ Es sei $x = 0$

$$\Rightarrow \|x\| = \max\{|0| + |0|, 2|0|\} = 0 \qquad \checkmark$$

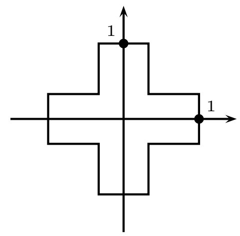
II

$$\|\alpha x\| = \max\{|\alpha x_1| + |\alpha x_2|, 2|\alpha x_1|\} = |\alpha| \max\{|x_1| + |x_2|, 2|x_2|\} = |\alpha|\|x\| \quad \checkmark$$

III

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \max\{|x_1+y_1| + |x_2, y_2|, 2|x_1+y_1|\} \\ &\le \max\{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|, 2|x_1| + 2|y_1|\} \\ &\le \max\{|x_1| + |x_2|, 2|x_1|\} + \max\{|y_1| + |y_2|, 2|y_2|\} \\ &= \|x\| + \|y\| \qquad \square \end{aligned}$$

3. **Vor:** Sphäre:



Beh: $\|x\| = \min\{\max\{|x_1|, 3|x_2|\}, \max\{3|x_1|, |x_2|\}\}$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$

Bew: I „⇒“ Es sei $\|x\| = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 = \min\{\max\{|x_1|, 3|x_2|\}, \max\{3|x_1|, |x_2|\}\} \\ &\Rightarrow 0 = \max\{|x_1|, 3|x_2|\} \text{ oder } \max\{3|x_1|, |x_2|\} = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

„⇐“ Es sei $x = 0$

$$\|x\| = \min\{\max\{|0|, 3|0|\}, \max\{3|0|, |0|\}\} = \min\{0, 0\} = 0 \qquad \checkmark$$

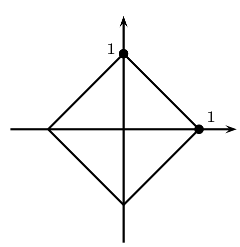
II

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \min\{\max\{|\alpha x_1|, 3|\alpha x_2|\}, \max\{3|\alpha x_1|, |\alpha x_2|\}\} \\ &= \min\{|\alpha| \max\{|x_1|, 3|x_2|\}, |\alpha| \max\{3|x_1|, |x_2|\}\} \\ &= |\alpha| \min\{\max\{|x_1|, 3|x_2|\}, \max\{3|x_1|, |x_2|\}\} \\ &= |\alpha| \|x\| \qquad \checkmark \end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \min\{\max\{|x_1+y_1|, 3|x_2+y_2|\}, \max\{3|x_1+y_1|, |x_2+y_2|\}\} \\ &\leq \min\{\max\{|x_1|+|y_1|, 3|x_2|+3|y_2|\}, \max\{3|x_1|+3|y_1|, |x_2|+|y_2|\}\} \\ &\leq \min\{\max\{|x_1|, 3|x_2|\} + \max\{|y_1|, 3|y_2|\}, \\ &\quad \max\{3|x_1|, |x_2|\} + \max\{3|y_1|, |y_2|\}\} \\ &\leq \min\{\max\{|x_1|, 3|x_2|\}, \max\{3|x_1|, |x_2|\}\} \\ &\quad + \min\{\max\{|y_1|, 3|y_2|\}, \max\{3|y_1|, |y_2|\}\} \\ &= \|x\| + \|y\| \qquad \square \end{aligned}$$

4. **Vor:** Sphäre:



Beh: $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$

Bew: I „⇒“ Es sei $\|x\| = 0$

$$\Rightarrow |x_1| = -|x_2| \quad \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

„⇐“ Es sei $x = 0$

$$\|x\| = |0| + |0| = 0 \qquad \checkmark$$

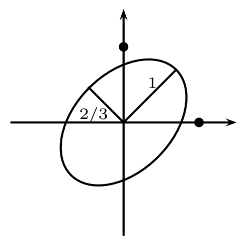
II

$$\|\alpha x\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) = |\alpha|\|x\| \qquad \checkmark$$

III

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \\ &= |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = \|x\| + \|y\| \qquad \square \end{aligned}$$

5. **Vor:** Sphäre:



Beh: $\|x\| = \sqrt{\frac{9(x_1-x_2)^2}{8} + \frac{(x_1+x_2)^2}{2}}$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$

Bew: Herleitung der Zuordnungsvorschrift:

Für eine Ellipse mit den Halbachsen $a = \frac{2}{3}$ und $b = 1$ gilt:

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1^2$$

So wäre auch die Norm definiert, wenn die Halbachsen parallel zu den Koordinatenachen liegen. Allerdings werden die Koordinatenachsen aber rotiert, so dass

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} \qquad y_2 = \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

Setzt man diese Werte nun in die Ellipsengleichung ein, so erhällt man:

$$\frac{9(x_1 - x_2)^2}{8} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} = 1^2$$

Da nun die Sphäre einer Norm alle Vektoren enthält deren Norm 1^2 ist, folgt:

$$\|x\| = \sqrt{\frac{9(x_1 - x_2)^2}{8} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2}}$$

Nun der Beweis einer Norm:

I „$\Rightarrow$“ Es sei $\|x\| = 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 0 &= \sqrt{\frac{9(x_1-x_2)^2}{8} + \frac{(x_1+x_2)^2}{2}} \\
\Rightarrow 0 \geq -4(x_1+x_2)^2 &= 9(x_1-x_2)^2 \geq 0 \\
\Rightarrow x_1 + x_2 &= x_1 - x_2 = 0 \\
\Rightarrow x_1 &= x_2 = 0 \qquad \Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“ Es sei $x = 0$

$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{\frac{9(0)^2}{8} + \frac{(0)^2}{2}} = 0 \qquad \checkmark$$

II

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= \sqrt{\frac{9(\alpha x_1 - \alpha x_2)^2}{8} + \frac{(\alpha x_1 + \alpha x_2)^2}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{9(\alpha(x_1-x_2))^2}{8} + \frac{(\alpha(x_1+x_2))^2}{2}} \\
&= \sqrt{\alpha^2\left(\frac{9(x_1-x_2)^2}{8} + \frac{(x_1+x_2)^2}{2}\right)} \\
&= |\alpha|\sqrt{\left(\frac{9(x_1-x_2)^2}{8} + \frac{(x_1+x_2)^2}{2}\right)} \\
&= |\alpha|\|x\| \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \sqrt{\frac{9((x_1+y_1)-(x_2+y_2))^2}{8} + \frac{((x_1+y_1)+(x_2+y_2))^2}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{9((x_1-x_2)+(y_1-y_2))^2}{8} + \frac{((x_1+x_2)+(y_1+y_2))^2}{2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{9(x_1-x_2)^2 + 9(y_1-y_2)^2}{8} + \frac{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{9(x_1-x_2)^2}{8} + \frac{(x_1+x_2)^2}{2} + \frac{9(y_1-y_2)^2}{8} + \frac{(y_1+y_2)^2}{2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{9(x_1-x_2)^2}{8} + \frac{(x_1+x_2)^2}{2}} + \sqrt{\frac{9(y_1-y_2)^2}{8} + \frac{(y_1+y_2)^2}{2}} \\
&= \|x\| + \|y\| \qquad \square
\end{aligned}$$

b) **Vor:** $N_E(x) := \inf\{\lambda > 0 | x \in \lambda E\}$ mit E konvex, punktsymetrisch, beschränkt und enthält Umgebung von Null

Beh: N_E ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$

Bew: Es sind die Eigenschaften einer Norm zu zeigen:

I: $N_E(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ II: $N_E(\alpha x) = |\alpha| N_E(x)$ III: $N_E(x+y) = N_E(x) + N_E(y)$

I „$\Rightarrow$“ Es sei $N_E(x) = 0$
Aus E beschränkt folgt: $\text{diam}(E) < \infty$
Mit $\exists r > 0 : B_r(0) \subset E \qquad \Rightarrow E \subset B_{\text{diam}(E)}(0)$
Nun ist $N_E(x) = 0 = \inf\{\lambda > 0 | x \in \lambda E \subset B_{\text{diam}(\lambda h E)}(0)\}$

$$\Rightarrow x \in \lim_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon(0) = \{0\} \qquad \Rightarrow x = 0$$

„$\Leftarrow$“ Es sei $x = 0$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : x \in \frac{\varepsilon}{\text{diam}(E)} E \subset B_\varepsilon(0)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \inf\{\lambda\} < \frac{\varepsilon}{\text{diam}(E)} \overset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$$

$$\Rightarrow N_E(x) = 0 \qquad \checkmark$$

II oBdA sei $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} N_E(\alpha x) &= \inf\{\lambda > 0 | (\alpha x) \in \lambda E\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 | x \in \frac{\lambda}{\alpha} E\} \\ \text{sym.} &= \inf\{\lambda > 0 | x \in \frac{\lambda}{|\alpha|} E\} \\ &= \inf\{\lambda|\alpha| > 0 | x \in \lambda E\} \\ &= |\alpha| \inf\{\lambda > 0 | x \in \lambda E\} \\ &= |\alpha| N_E(x) \end{aligned}$$

III Nach den Eigenschaften der Norm gilt:

$$x \in N_E(x)E \qquad y \in N_E(y)$$

Nun ist:

$$x + y \in N_E(x)E \cup N_E(y)E = (N_E(x) + N_E(y))E$$

Daraus folgt:

$$N_E(x+y) = \inf\{\lambda > 0 | (x+y) \in \lambda E \subseteq (N_E(x) + N_E(y))E\}$$

$$\Rightarrow N_E(x+y) \leq N_E(x) + N_E(y) \qquad \square$$

Übungsblatt 8 A2

Aufgabe 1: Partielle Differentation

Vor:

$$h(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi\vartheta t} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\vartheta t}\right)$$

Beh: h ist eine Lösung der Diffentialgleichung

$$\partial_t u(t, x_1, x_2) - \vartheta(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) u(t, x_1, x_2) = 0$$

Bew: Als erstes sollte die Funktion h beschrieben werden.

Die Funktion h ordnet jedem Punkt der Ebene einen skalaren Wert zu. Der skalare Wert der Funktion bei einem festen Punkt (x_1, x_2) wird mit beginnt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ streng monoton wachsend. Allerdings ist die Funktion beschränkt, so dass h für $t \to \infty$ einen konstanten Wert annehmen wird.

Nun der eigentliche Beweis: Aus Gründen der besseren darstellbarkeit sei im folgenden:

$$E := \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\vartheta t}\right)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\partial_t h(t, x_1, x_2) &= -\frac{1}{4\pi\vartheta t^2} E + \frac{1}{4\pi\vartheta t} E \frac{x_1^2 + x_2^2}{4\vartheta t^2} \\
&= -\frac{1}{4\pi\vartheta t^2} E + \frac{1}{16\pi\vartheta^2 t^3} E \\
\partial_{x_1}^2 h(t, x_1, x_2) &= \partial_{x_1}\left(-\frac{x_1}{8\pi\vartheta^2 t^2} E\right) \\
&= -\frac{1}{8\pi\vartheta^2 t^2} E + \frac{x_1^2}{16\pi\vartheta^3 t^3} E \\
\partial_{x_2} h(t, x_1, x_2) &= \ldots = -\frac{1}{8\pi\vartheta^2 t^2} E + \frac{x_2^2}{16\pi\vartheta^3 t^3} E
\end{aligned}$$

Nun ergibt sich die oben angegebene Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \partial_t u(t, x_1, x_2) - \vartheta(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) u(t, x_1, x_2) \\
= & -\frac{1}{4\pi\vartheta t^2} E + \frac{1}{16\pi\vartheta^2 t^3} E - \vartheta\left(-\frac{1}{8\pi\vartheta^2 t^2} E + \frac{x_1^2}{16\pi\vartheta^3 t^3} E - \frac{1}{8\pi\vartheta^2 t^2} E + \frac{x_2^2}{16\pi\vartheta^3 t^3} E\right) \\
= & -\frac{1}{4\pi\vartheta t^2} E + \frac{1}{16\pi\vartheta t^3} E + \frac{1}{8\pi\vartheta t^2} E - \frac{x_1^2}{16\pi\vartheta^2 t^3} E + \frac{1}{8\pi\vartheta t^2} E - \frac{x_2^2}{16\pi\vartheta^2 t^3} E \\
= & -\frac{1}{4\pi\vartheta t^2} E + \frac{1}{4\pi\vartheta t^2} E + \frac{x_2^2}{16\pi\vartheta^2 t^3} E - \frac{x_2^2}{16\pi\vartheta^2 t^3} E = 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Parametrisierte Trajektorien

a) **Beh:** Die Trajektorie eines Punktes auf einem abrollenden Kreises ist

$$r(t) = \begin{pmatrix} t + \sin\left(\frac{t}{\rho}\right) a \\ \rho - \cos\left(\frac{t}{\rho}\right) a \end{pmatrix}$$

Bew: Es sei R die Trajektorie des Kreismittelpunkts. Es ist

$$R(t) = \begin{pmatrix} vt \\ \rho \end{pmatrix}$$

Der Vektor a bezeichne den Vektor von Kerismittelpunkt zum Punkt auf dem Kreis.

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

Nun ist der Ortsvektor des Punktes definiert durch:

$$r(t) = R(t) + M_R a = \begin{pmatrix} vt \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

Da nun die Bewegung des Kreismittelpunktes, wie auch die Rotation des Kreises, linear ist, kann $\varphi(t)$ als $\varphi(t) = \frac{v}{\rho}$. Somit ist

$$r(t) = \begin{pmatrix} vt + \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) a \\ \rho - \cos\left(\frac{vt}{\rho}\right) a \end{pmatrix}$$

Da die „Geschwindigkeit“ für die Trajektorie unerheblich ist, kann diese als $v = 1$ definiert werden, was zu beweisen war.

b) **Beh:**

$$p(t) = \begin{pmatrix} (R + r)\cos(t) - a\sin\left(\frac{R+r}{r}t\right) \\ (R + r)\sin(t) - a\cos\left(\frac{R+r}{r}t\right) \end{pmatrix}$$

ist die Trajektorie eines Punktes auf einem Kreis, der auf bzw. in einem Kreis abrollt.

Bew: Es ist der Ortvektor des Punktes im Bezzu auf den Mittelpunkt des kleinen Kreises

$$a(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2(t))a \\ \cos(\varphi_2(t))a \end{pmatrix}$$

Für den Mittelpunksvektor des Kleinen Kreises gilt:

$$m(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1(t))(R + r) \\ \sin(\varphi_1(t))(R + r) \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor des Punktes lässt sich also beschreiben als:

$$p(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_2(t))a \\ \cos(\varphi_2(t))a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1(t))(R + r) \\ \sin(\varphi_1(t))(R + r) \end{pmatrix}$$

Nun sei $\varphi_2(t) = \frac{2\pi r}{T}t$. Jetzt ist zu bemerken, dass von Kreismittelpunkt des kleinen in der Zeit T eine Strecke von $(R + r)$ zurückgelegt wurde. Somit ist:

$$p(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi r}{T}t)(R + r) \\ \sin(\frac{2\pi r}{T}t)(R + r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(\frac{2\pi(R+r)}{T}t)a \\ \cos(\frac{2\pi(R+r)}{T})a \end{pmatrix}$$

Wieder spielt die konstante Parametriesierung keine Rolle so dass angenommen werden kann $T = 1/2\pi r$, was zur Behauptung führt.

c) **Beh:** Die vom Jungen gesehene Flugbahn des Vogels ist gegeben durch

$$r(t) = (vt + x_0)\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b\sin(\omega t) \\ b\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Bew: Die Flubahn des Vogels im bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem sei gegeben durch

$$r_v(t) = \begin{pmatrix} vt + x_0 \\ b \end{pmatrix}$$

Nun befindet sich der Junge auf einer konstant rotierenden Scheibe, so dass die Transformationsmatix zwischen äußerem und Bezugsystem des Jungen gegeben ist durch

$$M_r = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Für den Jungen ergibt sich die Flugbahn des Vogels als:

$$r(t) = M_r \cdot r_v(t) = (vt + x_0)\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b\sin(\omega t) \\ b\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Parabeln und Ellipsen

a) **Beh:** Parallel und senkrecht einfallende Strehalbündel werden von einer Parabel zu einem Brennpunkt reflektiert.

Bew: Als erstes wird eine Funktion zur Definition eines Rotationsbaraboliden benötigt. Es sei:

$$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad p(x) = (x_1, x_2, \alpha x_1^2 + \alpha x_2^2)$$

Nun entspricht die Refektion eines Punktes des Parabols genau der Reflektion an der Tangentialebene. Die Funktionen t_1 und t_2 ordnen jedem Punkt die Spannvektoren der Ebene zu. Es ist

$$t_1(x) = \partial_{x_1} p(x) = (1, 0, 2\alpha x_1) \quad t_2(x) = \partial_{x_2} p(x) = (1, 0, 2\alpha x_2)$$

Nach den Reflektionsgesetzen gilt nun Einfallswinkel = Ausfallswinkel jeweils zum Normalenvektor der Ebene. Es sei n die Funktion die jedem Punkt des Parabolieden den Normalenvektor der Ebene zuordnet:

$$t_1(x) \perp n(x) \perp t_2(x) \Rightarrow n(x) = (-2\alpha x_1, -2\alpha x_2, 1)$$

Nun gilt für Einfallswinkel und Ausfallswinkel ($s(x)$ bezeichne den Ausfallsvektor eines reflektierten Strahls) bei senkrechtem Strahlenbündel:

$$\frac{e_z \cdot n(x)}{\|e_z\|_2 \, \|n(x)\|_2} = \cos(\alpha) = \frac{s(x) \cdot n(x)}{\|s(x)\|_2 \cdot \|n(x)\|_2}$$

Und umgeformt ist

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = -2\alpha x_1 s_1 - 2\alpha x_2 s_2 + s_3$$

Durch Wahl von s_1 und s_2 ergibt sich $s(x)$ zu

$$s(x) = (-x_1, -x_2, -\frac{4\alpha^2 x_1^2 + 4\alpha^2 x_2^2 - 1}{4\alpha})$$

Nun bleibt zu zeigen, dass sich alle Reflektierten Strahlen in einem Punkt b treffen. Es genügt zu zeigen: $\exists b \in \mathbb{R}^3 : \forall x \in \mathbb{R}^2 \exists \gamma \in \mathbb{R} : b = \gamma s(x) + p(x)$. Daraus folgt

$$\left.\begin{array}{rcl} b_1 & = & -\gamma x_1 + x_1 \\ b_2 & = & -\gamma x_2 + x_2 \end{array}\right\} \gamma = 1$$

$$b_3 = -\frac{4\alpha^2 x_1^2 + 4\alpha^2 x_2^2 - 1}{4\alpha} + \alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 = \frac{1}{4\alpha}$$

Es ist $b = (0, 0, \frac{1}{4\alpha})$ und somit unabhängig von der Wahl von x, was zu Beweisen war.

c) **Beh:** Die Foci einer Ellipse sind Brennpunkte

Bew: Eine Ellipse ist gegeben durch eine einfache Gleichung.

$$\frac{x_1^2}{a^2}\frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Geometrisch ist die Ellipse die Menge aller Punkte die zu zwei Foci, f_1 und f_2 eine festen Abstand haben. Wenn $f_1 = (+f, 0)$ und $f_2 = (-f, 0)$ so ist für jeden Punkt der Ellipse

$$d(f_1, x) + d(f_2, x) = 2a$$

a wird große Achse, b kleine Achse der Ellipse genannt. Der Abstand der Foci zum Uhrsprung ergibt sich als $f = \sqrt{a^2 - b^2}$. Zu einer Ellipse können zwei Leitlinien definiert werden. Für jeden Punkt auf der Ellipse ist der Abstand d_1 bzw d_2 zu einer der Leitlinien im Verhältnis zum Abstand vom jeweiligen Brennpunkt ein konstanter Wert, der als Numerische Exzentrizität bezeichnet wird und bei der Elipse kleiner als 1 ist. Es ist:

$$\frac{d(f_1, x)}{d(d_1, x)} = \frac{d(f_2, x)}{d(d_2, x)} = e = \frac{f}{a}$$

Jetzt der interessante Punkt: Die Tangenten/Normale an die Elipse ist an einem festen Punkt $(x_1^{(0)}, x^{(0)_2})$ der Ellipse ist gegeben durch:

$$\frac{x_1 x_1^{(0)}}{a^2} + \frac{x_1 x_1^{(0)}}{b^2} = 1$$

Die Normale ist die Winkelhalbierende zwischen den Vektoren, die $(x_1^{(0)}, x^{(0)_2})$ mit f_1 bzw. f_2 verbinden. Nach den Reflektionsgesetzen der Physik ergibt sich so, dass alle Strahlen, die in f_1 ihren Ursprung haben sich in f_2 wieder überschneiden. Somit sind die Foci der Ellipse Brennpunkte.

Übungsblatt 10 A2

Aufgabe 1: Kugelkoordinaten

a) Die Bedeutung von r, ϕ und θ
In Kugelkoordinaten werden drei unterschiedliche Werte zur genauen Bestimmung eines Vektor im dreidimensionalen Raums angegen. Der erste Wert des Zahlentrippels r gibt die Länge des Vektors an. Der zweite Wert, der Azimutalwinkel gibt den mathematisch positiven Winkel zwischen Vektor und positiver x-Achse an. Analog dazu gibt der Polarwinkel θ den Winkel zwischen positiver Z-Achse und Vektor an.

b) Analog zu Polarkoordinaten gibt es auf der Erde ein ähnliches Bezugsystem. Allerding wird die Position auf der Erde durch die Angabe eines Längengrades λ und eines Breitengrades φ bewerkstelligt. Dabei ist der Abstand vom Erdmittelpunkt als R zu verstehen.
Der Längengrad gibt den Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors auf die Äquatorebene bezüglich eines willkürlich gewählten Referenzpunktes an. Der Wertebereich beträgt $\lambda \in [180°W, 180°E] \hat{=} [-\pi, \pi]$. Dabei ist die Bewegung nach Osten positiv.
Der Breitengrad φ gibt den Winkel zwischen Ortsvektor und Äquatorebene ab. Der Wertebereich ist $\varphi \in [90°S, 90°N] \hat{=} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ Die Funktion $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vermittelt die Basistransformation von der Erdkoordinaten in ein kartesisches Koordinatensystem mit der Z-Achse durch die Pole und der A-Achse durch den Punkt $(R, 0°E, 0°N)$.
Es ist:

$$T(R, \lambda, \varphi) \mapsto (R \cos\lambda \cos\varphi, R \sin\lambda \cos\varphi, R \sin\varphi)$$

In jedem Punkt auf der Erdoberfläche gibt es ein ortsabhängiges rechtwinkliges Koordinatensystem. Dazu müssen ortsabhängige senkrechte Einheitsvektoren gewählt werden. Auf der Erdoberfläche bietet sich ein Vektor nach Norden N, ein Vektor nach Osten E und ein senkrecht zur Erdoberfläche stehender Vektor V an. Die kartesische Darstellung der Vektoren ergeben sich durch partielle Differenzierung. Es ist:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial_R T}{\|\partial_R T\|} = (\cos\lambda \cos\varphi, \sin\lambda \cos\varphi, \sin\varphi) \\ N &= \frac{\partial_R T}{\|\partial_R T\|} = (-\cos\lambda \sin\varphi, -\sin\lambda \sin\varphi, \cos\varphi) \\ E &= \frac{\partial_R T}{\|\partial_R T\|} = (-\sin\lambda, \cos\lambda, 0) \end{aligned}$$

Gesucht ist nun ein normierter Vektor, so dass dieser Vektor parallel zu den Achsen den kartesischen Koordinatenachsen ist. Der Verktor $(\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$ in lokalen Koordinaten und ist normiert. Die Vektoren parallel zu der Äquatorebene ergeben sich zu $(\cos\lambda \cos\phi, -\sin\lambda, -\cos\lambda \sin\phi)$ parallel zur x-Achse und $(\sin\lambda \cos\phi, \cos\lambda, -\sin\lambda \sin\phi)$ parallel zur y-Achse.

Aufgabe 2: Diffentialrechnung in Kugelkoordinaten

a) **Vor:** Es sei T die Koordinatentransformation

$$T : U \to \mathbb{R}^3 \qquad U \subset \mathbb{R}^3 \qquad T : (r, \phi, \theta) \mapsto (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)$$

Beh: Für $U := \{(r, \phi, \theta)|r \in [0, \infty), \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$ ist T surjektiv.
Für $U := \{(r, \phi, \theta)|r \in (0, \infty), \phi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \pi)\}$ ist T injektiv.

Bew: Für $U := \{(r, \phi, \theta)|r \in [0, \infty), \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$ ist T surjektiv, da
$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \exists (r, \phi, \theta) \in U : T(r\phi, \theta) = x$, denn
jeder Punkt des $\mathbb{R}^3$ hat einen Abstand von Uhrspung im Bereich $0 < \|x\| < \infty$
durch $\phi \in [0, 2\pi]$ wird jeder Punkt der Koordinatenebene xy getroffen werden
Mit dem Höhenwinkel von $\theta \in [0, \pi]$ wird auch jeder Punkt des $\mathbb{R}^3$ getroffen.
Andere Darstellung: Durch eine Einschrkänkung ist das Bild der Transformation ein geschlossener Kugelrand um den Ursprung

$$T(\{(r, \phi, \theta) \in U | r = const.\}) = \partial B_r(0) \in \mathbb{R}^3$$

Nun der Fall $U := \{(r, \phi, \theta)|r \in (0, \infty), \phi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \pi)\}$:
Hier ist T injektiv d.h.

$$\forall (r_1\phi_1, \theta_1), (r_2, \phi_2\theta_2) \in U : T(r_1, \phi_1, \theta_1) = T(r_2, \phi_2\theta_2) \Rightarrow (r_1, \phi_1, \theta_1) = (r_2, \phi_2\theta_2)$$

Wählen wir einen Punkt aus dem $x \in \mathbb{R}^3$ auserhalb der Koordinatenachen, also im Bildbereich, so können wir $r = \|x\|_2$ eindeutig bestimmen. Nun können wir mit $\cos\phi = \frac{x_1}{r}$ und $\sin\phi = \frac{x_2}{r}$ den Azimutalwinkel ebenfalls eindeutig bestimmen. Als letztes bleibt der Polarwinkel θ der mit $\cos\theta = \frac{x_3}{r}$ ebenfalls eindeutig bestimmt ist. Somit ist T injektiv.
Der Bildbereich von T ist dann

$$T(U) = \mathbb{R}^3 \backslash \{(\alpha, 0, 0), (0, \beta, 0), (0, 0, \gamma)\} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

also der $\mathbb{R}^3$ ohne die Koordinatenachsen, da in diesem Fall U offen sein sollte.

b) **Beh:** $T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (R, \Phi, \Theta)$ mit

$$R(x) = \|x\|_2 \quad \Theta(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) & y < 0 \end{cases}$$

Bew: Als Beweis kann hier in die Tranformation eingesetzt werden.

Also $T^{-1}(T(x)) = x$

$$\begin{aligned}
R(T(r,\phi,\theta)) &= \sqrt{r^2\cos^2\phi\sin^2\theta + r^2\sin^2\phi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta} \\
&= r\sqrt{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\sin^2\theta + \cos^2\theta} \\
&= r\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = r \\
\Theta(T(r,\phi,\theta)) &= \operatorname{arccot}\left(\frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\phi\sin^2\theta + r^2\sin^2\phi\sin^2\theta}}\right) \\
&= \operatorname{arccot}\left(\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}}\right) \\
&= \operatorname{arccot}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \operatorname{arccot}(\cot\theta) = \theta \\
\text{Sei } \phi &\in [0,\pi] \\
\Phi(T(r,\phi,\theta)) &= \arccos\left(\frac{r\cos\phi\sin\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\phi\sin^2\theta + r^2\sin^2\phi\sin^2\theta}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{r\cos\phi\sin\theta}{r^2\sin\theta\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}}\right) \\
&= \arccos(\cos\phi) = \phi
\end{aligned}$$

Nun die partielle Ableitung: erstmal für den Fall $y \geq 0$

$$\begin{aligned}
\partial_x\Phi(x,y,z) &= -\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2-x^2}{x^2+y^2}}}\right)\left(\frac{x^2+y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \\
&= -\frac{|y|}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Analog erhällt man für $y < 0$:

$$\partial_x\Phi(x,y,z) = \ldots = \frac{|y|}{x^2+y^2}$$

Damit ist die Partielle Ableitung unabhängig vom Vorzeichen von y

$$\partial_x\Phi(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Eine Bestimmung der partiellen Ableitung $\partial_x\Phi$ ist mit Hilfe der Umkehrregel bei Kenntnis der Funktionen R und Θ möglich. Dabei gilt wenn $T(r,\phi,\theta) \mapsto (X,Y,Z)$ und $T^{-1}(x,y,z) \mapsto (R,\Phi,\Theta)$:

$$(T^{-1})' \cdot T' = I_{\mathbb{R}^3}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_y R & \partial_z R \\ \partial_x \Phi & \partial_y \Phi & \partial_z \Phi \\ \partial_x \Theta & \partial_y \Theta & \partial_z \Theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_\phi X & \partial_\theta X \\ \partial_r Y & \partial_\phi Y & \partial_\theta Y \\ \partial_r Z & \partial_\phi Z & \partial_\theta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch die Betrachtung der zweiten Zeile also

$$\begin{pmatrix} \partial_x \Phi & \partial_y \Phi & \partial_z \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_\phi X & \partial_\theta X \\ \partial_r Y & \partial_\phi Y & \partial_\theta Y \\ \partial_r Z & \partial_\phi Z & \partial_\theta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kann nun nach $\partial_x \Phi$ aufgelöst werden... Ist nur ein bisschen umständlich! Etwas einfacher gestaltet sich da die Invertierung der Jakobimatrix. Das gesuchte Differential steht dann in der ersten Spalte, in der zweiten Zeile:

$$J_T = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\sin(\theta) & -r\sin(\phi)\sin(\theta) & r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & r\cos(\phi)\sin(\theta) & r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$J_T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)} & 0 \\ \frac{\cos(\phi)\cos(\theta)}{r} & \frac{\cos(\theta)\sin(\phi)}{r} & -\frac{\sin(\theta)}{r} \end{pmatrix}$$

c) **Beh:**

$$\nabla f = \partial_r f e_r + \frac{1}{r}\partial_\phi f e_\phi + \frac{1}{r\sin\phi}\partial_\theta f e_\theta$$

Bew: Es seien e_x, e_y, e_z die Einheitvektoren der karthesischen Basis, sowie e_r, e_ϕ, e_θ die Eingeitsvektoren eines lokalen orthogonalen Koordinatensystems, k ein Vektor in lokalen System. Der Gradient ist nun definiert als:

$$\nabla f = \partial_x f e_x + \partial_y f e_y + \partial_z f e_z$$

Für die Koordinatentrandformation kann die Jakobimatrix verwendet werden. Es gilt für die Partiellen Ableitungen

$$(\partial_r f, \partial_\phi f, \partial_\theta f) = J_T \cdot (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$$

Für die Eingeitsvektoren des lokalen Koordinatensystems gilt:

$$e_r = \frac{\partial_r T}{\|\partial_r T\|} = \frac{1}{\|\partial_r T\|} J_T \cdot e_x = J \cdot e_x$$

$$e_\phi = \frac{\partial_\phi T}{\|\partial_\phi T\|} = \frac{1}{\|\partial_\phi T\|} J_T \cdot e_y = \frac{1}{r} J_T e_y$$

$$e_\theta = \frac{\partial_\theta T}{\|\partial_\theta T\|} = \frac{1}{\|\partial_\theta T\|} J_T \cdot e_y = \frac{1}{r\sin\phi} J_T e_z$$

Nun kann der Gradient umschrieben werden als:

$$\nabla f = \partial_r f e_r + \frac{1}{r}\partial_\phi f e_\phi + \frac{1}{r\sin\phi}\partial_\theta f e_\theta \quad \square$$

Übungsblatt 12 A2

Aufgabe 1: Seltsame Minimumslinien

Vor: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (x^2+y^2)(x^2-3x+y^2)+2x^2$$

Beh: f hat entlang jeder Geraden durch (0,0) ein lokales Minimum, aber kein lokales Minimum

Bew: Überprüfung der Minimumsituation von f bezüglich Geraden:
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $g(t) := \binom{xt}{yt}$ $x, y \in \mathbb{R}$. g parametrisiert Geraden durch den Ursprung mit $g(0) = 0$. Nun ist:

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f \circ g(t) = (x^2+y^2)(t^4x^2 - 3t^3x + t^4y^2) + 2t^2x^2$$

Ableiten nach t liefert:

$$\begin{aligned} (f\circ g)'(t)\big|_{t=0} &= (x^2+y^2)(4t^3x^2 - 9t^2x + 4t^3y^2) + 4tx^2\big|_{t=0} = 0 \\ (f\circ g)''(t)\big|_{t=0} &= (x^2+y^2)(12t^2x^2 - 18tx + 12t^2y^2) + 4x^2\big|_{t=0} > 0 \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

Notwendige und Hinreichende Bedingung sind also für $x \neq 0$ erfüllt. Betrachtet man nun die Funktion f entlang der y-Achse:

$$f|_{x=0} = (y^2)(y^2) = y^4$$

Die Funktion hat also auch entlang der y-Achse ein lokales Minimum im Ursprung. ✓
Im mehrdimensionalen Fall ist die notwendige Bedingung

$$\operatorname{grad} f|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2\,x\left(x^2+y^2-3\,x\right) + \left(x^2+y^2\right)(2\,x-3) + 4\,x \\ 2\,y\left(x^2+y^2-3\,x\right) + 2\,\left(x^2+y^2\right)y \end{pmatrix}_{(0,0)} = 0$$

erfüllt. Eine Untersuchung der Hessematrix allerdings liefert:

$$\begin{aligned} H_f|\,(0,0) &= \begin{pmatrix} 4\,x^2+4\,y^2-6\,x+4\,x\,(2\,x-3)+4 & 4\,xy+2\,y\,(2\,x-3) \\ 4\,xy+2\,y\,(2\,x-3) & 4\,x^2+12\,y^2-6\,x \end{pmatrix}_{(0,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Hessematrix ist positiv-semidefinit, liefert also kein Kriterium für ein lokales Minimum. Wählt man allerdings eine Kurfe $k : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit der Parametrisierung

$$k(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t-t^2} \end{pmatrix}$$

Und betrachtet die Funktion f entlang dieser Kurve durch den Ursprung:

$$\begin{aligned}(f \circ k)(t) &= (t^2 + t - t^2)(t^2 - 3t + t - t^2) + 2t^2 \\ &= t(-2t) + 2t^2 = 0\end{aligned}$$

Wird der Wert von $f(0,0) = 0$ auf einer ganzen Kurve durch den Nullpunkt angenommen. f hat also in $(0,0)$ kein lokales Minimum. $\square$

Aufgabe 2: Lagrange-Multiplikatoren

a) **Vor:** Die Minimale Distanz zwischen $P := (0,c) \in \mathbb{R}^2$ und dem Graph der Parabel $\Gamma := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ als Minimierungsproblem.

Bew: Diese Problem kann als Minimierungsproblem einer Funktion f mit

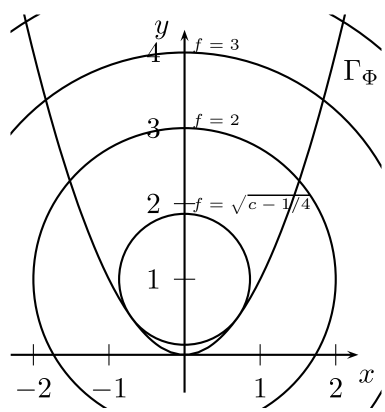
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

und der Nebenbedingung $\Phi(x,y) = 0$ mit

$$\Gamma = \Gamma_\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \Phi(x,y) = 0\} \Rightarrow \Phi(x,y) = x^2 - y$$

versanden werden.

b) Für festes $c = 1$ ergeben sich so die Niveaulinien der Funktion f und der Graph Γ_Φ



c) **Beh:** Der Abstand zwischen P und Γ_Φ ist $\sqrt{c - \frac{1}{4}}$

Bew: Sei nun h definiert als:

$$h(x,y,\lambda) := f(x) + \lambda\Phi(x,y)$$

Hat nun $f|_{\Gamma_\Phi}$ Extremstellen, so sind diese kritische Punkte von h, sprich $h'(x,y,\lambda) = \nabla h = 0$. Man erhällt also drei Bedingungen:

$$\partial_x h = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-c)^2}} + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$

$$\partial_y h = \frac{x - c}{\sqrt{x^2 + (y-c)^2}} - \lambda = 0 \tag{2}$$

$$\partial_\lambda h = x^2 - y = 0 \tag{3}$$

Durch Umformen von Gleichung (2) nach λ und einsetzen in (1)

$$0 = \frac{x + 2x(y-c)}{\sqrt{x^2 + (y-c)^2}} \Rightarrow y = c - \frac{1}{2}$$

mit Gleichung (3) ergibt sich für x

$$x = \pm\sqrt{c - \frac{1}{2}}$$

Eingesetzt in f ergibt sich:

$$f\left(\sqrt{c-\frac{1}{2}}, c - \frac{1}{2}\right) = f\left(-\sqrt{c-\frac{1}{2}}, c-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{c - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{c - \frac{1}{4}} \quad \square$$

d) **Vor:** $\overline{x} := \sqrt{c - \frac{1}{2}}$, $\overline{y} := c - \frac{1}{2}$ und $P := (0, c)$

Beh: Die minimale Verbindung zwischen P und Γ_Φ steht senkrecht auf Γ_Φ.

Bew: Wir wissen, dass der Gradient von Φ falls nicht null immer senkrecht auf Phi steht. Zu zeigen ist also:

$$\nabla\Phi(\overline{x}, \overline{y}) \parallel (\overline{x}, \overline{y}) - P$$

Für den Gradienten gilt:

$$\nabla\Phi|_{(\overline{x},\overline{y})} = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}_{(\overline{x},\overline{y})} = \begin{pmatrix} 2\overline{x} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für den Verbindungsvektor gilt:

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ c - \frac{1}{2} - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ -1/2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2\overline{x} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\nabla\Phi(\overline{x}, \overline{y}) = 2((\overline{x}, \overline{y}) - P) \Rightarrow \nabla\Phi(\overline{x}, \overline{y}) \parallel (\overline{x}, \overline{y}) - P \quad \square$$

Aufgabe 3: Implpiziete Lösung der Burgers-Gleichung

a) **Vor:** Sei $\Phi(u, t, x) := \exp(x - tu) - u$ für $u, x, t \in \mathbb{R}$

Beh: $\Phi|_{(\exp(x),0,x)} = 0$ kann in einer Umgebung von $(\exp(x), 0, x)$ nach u aufgelöst werden.

Bew: Klar ist:

$$\Phi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \sim C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}$. So gilt:

$$\Phi|_{(\exp(x),0,x)} = \exp(x - 0) - \exp(x) = 0$$

Nun ist

$$\Phi'|_{(\exp(x),0,x)} = \nabla\Phi^T|_{(\exp(x),0,x)} = \begin{pmatrix} -te^{x-tu} - 1 \\ -ue^{x-tu} \\ e^{x-tu} \end{pmatrix}^T_{(\exp(x),0,x)} = \left(-1, -e^{2x}, e^x\right)$$

Mit $\Phi' = (\Phi'_1, \Phi'_2)$, wobei $\Phi'_1 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und $\Phi'_2 \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ folgt für

$$\Phi'_1 = (-1) \quad \Rightarrow \quad \Phi'_1 \text{ invertierbar}$$

Mit dem Satz der impliziten Funktionen gibt es nun eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^2$ von $(\exp(x), 0, x)$, so dass eine Funktion $U(t,x) \in C^1(W, \mathbb{R})$ existiert, so dass

$$\forall (t,x) \in W : \Phi(U(t,x), t, x) = 0$$

Daraus folgt, dass die implizite Gleichung $\Phi = 0$ in Umgebung eines Punktes $(\exp(x), 0, x)$ nach $u = U(t,x)$ aufgelöst werden kann.

b) **Beh:** Die Funktion $U(t,x)$ löst die PDGL

$$\partial_t U(t,x) + \partial_x \frac{1}{2}(U(t,x))^2 = 0$$

Bew: Es ist $\Phi(U(t,x), t, x) = 0$. Nun ist:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_x \Phi(U,t,x) = \exp(x - tU) \cdot (1 - t\partial_x U) - \partial_x U \\
&\Rightarrow \partial_x U = \frac{\exp(x-tU)}{t\exp(x-tU)+1} \\
0 &= \partial_t \Phi(U,t,x) = \exp(x - tU) \cdot (-U - t\partial_t U) - \partial_t U \\
&\Rightarrow \partial_t U = -\frac{\exp(x-tU)\cdot U}{t\exp(x-tU)+1}
\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\partial_t U(t,x) + \partial_x \frac{1}{2}(U(t,x))^2 &= \partial_t U(t,x) + U(t,x) \cdot \partial_x U(t,x) \\
= -\frac{\exp(x - tU(t,x)) \cdot U(t,x)}{t\exp(x-tU(t,x))+1} &+ \frac{U(t,x)\cdot \exp(x-tU(t,x))}{t\exp(x-tU(t,x))+1} = 0 \quad \square
\end{aligned}$$