

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Physikalische Grundlagen	2
2.1	Einfache Schaltungen	2
2.1.1	Strom und Spannung	2
2.1.2	Die Kirchhoffschen Regeln	3
2.1.3	Widerstand und Impedanz	3
2.2	Bauteile im Stromkreis	4
2.2.1	Der Kondensator	5
2.2.2	Die Spule	6
2.3	RC-Filter	7
2.4	LC-Filter	9
3	Versuch und Auswertung	11
3.1	Bestimmung der Zeitkonstante	11
3.2	Messungen an den RC-Filtern	12
3.3	Messungen an den LC-Filtern	14
3.4	Fehlerdiskussion	16
4	Verzeichnisse	17
4.1	Literaturverzeichnis	17

Anhang A: Messprotokoll aus dem Praktikum

1 Einleitung

Mit Hilfe von einfachen passiven Bauelementen lassen sich bereits relativ effektive Filter für elektrische Signale realisieren. Filter bieten die Möglichkeit bestimmte Frequenzbereiche aus dem Spektrum eines Signals herauszufiltern. Die einfachsten Filter, Hoch- und Tiefpassfilter, lassen sich durch unterschiedliche Schaltungen mit Spulen und Kondensatoren realisieren. Diese sollen in diesem Versuch näher untersucht werden.

2 Physikalische Grundlagen

Im Folgenden sollen die für den Versuch wichtigen physikalischen Grundlagen genannt und beschrieben werden.

2.1 Einfache Schaltungen

Die Maxwell'schen Gleichungen bilden die Grundlage zur Beschreibung von elektrischen Schaltungen. Die Anwendung der Gleichungen führt allerdings auf wenig anschauliche und schwierige Rechnungen. Die Theorie der Elektrotechnik liefert hier, abgeleitet von den Maxwell'schen Gesetzen, ein gutes Werkzeug zur mathematischen Beschreibung einfacher Schaltungen.

2.1.1 Strom und Spannung

Anstatt die Vorgänge in einer Schaltung auf Grundlage von Ladungsdichte und Stromdichte zu beschreiben, wird auf die Berechnung von Ladungen komplett verzichtet. Statt dessen wird die elektrische Spannung als Potentialdifferenz aufgrund einer unterschiedlichen Ladungsdichte und der elektrische Strom als Konsequenz einer Stromdichte zur Beschreibung genutzt. Diese Größen sind makroskopisch messbar und bieten die Möglichkeit einer anschaulicheren Berechnung als die differentiellen Größen der Ladungs- und Stromdichte.

Eher uninteressant ist in diesem Zusammenhang die Ursache von Spannungen und den daraus resultierenden Strömen. Die Erzeugung einer Potentialdifferenz, also einer elektrischen Spannung, wird von einer Spannungsquelle realisiert. Diese sorgt in einer Schaltung für die Aufrechterhaltung oder Modellierung einer Potentialdifferenz. Eine Gleichspannungsquelle beispielsweise liefert eine zeitlich konstante Potentialdifferenz. Vorstellbar ist allerdings nahezu jeder zeitliche Verlauf der Spannung wie Rechtecksspannungen und periodische Wechselspannungen.

Ein wichtiger Verlauf einer Spannung ist durch die sinusförmige Wechselspannung gegeben. Diese gestattet eine relativ einfache Beschreibung von elektrischen Schaltungen. Durch die Überlagerung mehrerer sinusförmiger Spannungen unterschiedlicher Frequenz kann jeder periodische Spannungsverlauf beliebig gut approximiert werden. Die Darstellung einer harmonischen Wechselspannung ist auf verschiedene Arten möglich. Neben einer Darstellung mit den trigonometrischen Funktionen bildet die komplexe Exponentialfunktion eine Möglichkeit. Eine Spannung $U(t)$ wird dann durch

$$U(t) = \hat{U} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

mit der Frequenz f bzw Kreisfrequenz ω und der Periodendauer T beschrieben. Dabei steht der Realteil der komplexen Spannung für den jeweils physikalisch meßbaren Wert der Spannung zu einem Zeitpunkt. Die reelle Größe \hat{U} kann als Amplitude der Wechselspannung identifiziert werden. Der Phasenwinkel φ beschreibt hierbei die Phasenverschiebung zu einer reinen Cosinusspannung. Die komplexe Darstellung von Spannungen liefert, wie später gezeigt wird, eine elegante Methode zur Beschreibung von Bauteilen im Wechselstromkreis.

Analog zur Wechselspannung wird ein Wechselstrom ebenfalls komplex dargeseht.

2.1.2 Die Kirchhoffschen Regeln

Die Kirchhoffschen Regeln liefern Randbedingungen für das Auftreten und die Berechnung von Spannungen und Strömen an Bauteilen in einer Schaltung mit mehreren Bauteilen. Da sie später benötigt werden, sollen sie hier genannt werden.

Die Knotenregel besagt, dass in einem elektrischen Knoten (oder einem beliebigen Punkt im Netzwerk) die Summe aller gerichteten Ströme verschwinden muss, wenn der Knoten elektrisch neutral bleibt. In Formeln gilt:

$$\sum_{k=1}^n I_n(t) = 0 \quad (2)$$

Die Maschenregel stellt eine Bedingung für die Spannungen in einer Schaltung dar. Sie besagt, dass die Summe aller Spannungsabfälle über einen geschlossenen Weg im Netzwerk, also eine Masche, ebenfalls verschwinden muss.

$$\sum_{k=1}^n U_n(t) = 0 \quad (3)$$

Die Kirchhoffschen Regeln gelten auch für die Berechnung von Wechselströmen und Spannungen unter Beachtung der Phase.

2.1.3 Widerstand und Impedanz

In einem realen Leiter beobachtet man einen von der Stromstärke I abhängigen Spannungsabfall U zwischen den Leiterenden.

Der ohmsche Widerstand Nach dem ohmschen Gesetz verhalten sich Strom und Spannung proportional zueinander. Das Verhältnis der an den Leiter anliegenden Spannung zum resultierenden Strom wird als elektrischer (Gleichstrom-)Widerstand R definiert. Es gilt:

$$R = \frac{U}{I} \quad [R] = 1 \frac{V}{A} = 1\Omega \quad (4)$$

Jedem leitendem Bauteil im (Gleich-)Stromkreis kann aus Verhältnis von anliegender Spannung und fließendem Strom ein elektrischer Widerstand zugeordnet werden. Der ohmsche Widerstand als Bauteil besitzt außer der hemmenden Eigenschaft des elektrischen Widerstands keine weiteren elektrischen Eigenschaften.

Die Impedanz Etwas problematisch gestaltet sich die Definition eines Widerstandes im Wechselstromkreis da der Quotient aus Spannung und Strom zeit- und phasenabhängig ist. Hier hilft die komplexe Darstellung von Wechselströmen und Spannungen. Man definiert die komplexe Größe der Impedanz Z eines Bauteils als den Quotienten der komplexen Spannung und des komplexen Stroms:

$$Z := \frac{U(t)}{I(t)} \quad (5)$$

Die Impedanz setzt sich aus dem Wirkwiderstand R als Realteil und dem Blindwiderstand X_B als Imaginärteil zusammen. Der Scheinwiderstand $|Z|$ als Betrag der Impedanz liefert das Amplitudenverhältnis von Spannung und Strom. Die Darstellung einer komplexen Zahl in Exponentialform lässt auch auf das Phasenverhältnis zwischen Spannung und Strom schließen. Für die Impedanz gilt:

$$Z = R + iX_B = |Z| e^{i\varphi} \quad \varphi = \tan\left(\frac{X_B}{R}\right) \quad (6)$$

Schaltungen mit Impedanzen Mit Hilfe den Kirchhoffschen Regeln können für Impedanzen zu den ohmschen Widerständen äquivalente Formulierungen für Ersatzimpedanzen einzelner Bauteilgruppen gefunden werden. Für die Reihenschaltung von zwei Impedanzen Z_1 und Z_2 ergibt sich so eine Ersatzimpedanz Z_E von

$$Z_E = Z_1 + Z_2$$

Für die Parallelschaltung von Impedanzen ergibt sich die reziproke Ersatzimpedanz als Summe der reziproken Ersatzimpedanzen.

$$\frac{1}{Z_E} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

Die komplexe Impedanz ermöglicht in einer Schaltung die einfache Berechnung der Strom- und Spannungsverhältnisse bezüglich Amplitude und Phase an den verschiedenen Bauteilen.

Die Impedanz eines ohmschen Widerstands Eines der einfachsten Bauteile im Wechselstromkreis stellt der ohmsche Widerstand dar. Hierbei gilt, dass zu jedem Zeitpunkt der Spannungsabfall über den Widerstand durch den Stromfluss durch den Widerstand berechnet werden kann. Es gilt:

$$U(t) = R \cdot I(t) \quad \Rightarrow \quad Z_R = R$$

Die Impedanz des ohmschen Widerstandes ergibt sich gerade als der Wert des elektrischen Widerstandes R . Strom und Spannung erfahren durch den ohmschen Widerstand keine Phasenverschiebung. Für eine Wechselspannung mit $\omega \rightarrow 0$ ergibt sich der bekannte Zusammenhang für Gleichspannungen.

2.2 Bauteile im Stromkreis

Nachdem die Grundlagen für komplexere Bauteile im Strom vorgestellt wurden, sollen nun zwei passive Bauteile näher betrachtet werden. Der Kondensator und die Spule bilden die Grundlage für die passiven Filterschaltungen.

2.2.1 Der Kondensator

Der Kondensator ist ein Bauteil mit der Fähigkeit Ladungen und damit elektrische Energie zu speichern. Die einfachste Ausführung des Kondensators stellt der Plattenkondensator, zwei leitende Platten getrennt durch einen Isolator, dar. Legt man eine Spannung an die Pole des Kondensators (im Falle des Plattenkondensators an die Platten) fließen solange Ladungen auf den Kondensator bis die angelegte Spannung durch die Potentialdifferenz der Ladungen an den Polen vollständig kompensiert wird. Die maximale Ladung Q der Platten ist proportional zur angelegten Spannung U . Im Gleichgewichtszustand gilt

$$Q = C \cdot U \quad [C] = 1 \frac{C}{V} = 1F \quad (7)$$

Die Kapazität C ist als Proportionalitätskonstante eine charakteristische Eigenschaft des Kondensators.

Auf- und Entladevorgänge Betrachtet man einen Kondensator und einen ohmschen Widerstand in Reihenschaltung die an eine Gleichspannungsquelle mit U_q angeschlossen sind, so ergibt sich für die Spannungen über dem Widerstand und dem Kondensator für:

$$U_q = U_R(t) + U_C(t)$$

Mit der Definition des ohmschen Widerstandes, der Definition des Stroms und der Knotenregel folgt unmittelbar für die Spannung über dem Widerstand:

$$U_R(t) = R \cdot I(t) = R \cdot \frac{d}{dt}Q(t) = R \cdot C \cdot \dot{U}_C(t)$$

Dies führt auf die Differentialgleichung

$$\dot{U}_C(t) + \frac{1}{RC}U_C(t) = \frac{U_0}{RC} \quad (8)$$

Die Randbedingungen ergeben sich je nachdem ob der Auflade- oder der Entladevorgang betrachtet werden soll zu

$$U_C(0) = 0 \quad U_q = U_0$$

für den Aufladevorgang und

$$U_C(0) = U_0 \quad U_q = 0$$

für den Entladevorgang. Die Lösungen der Differentialgleichung ist für den Aufladevorgang durch

$$U_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

für den Entladevorgang durch

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

gegeben. Man definiert die Zeitkonstante τ einer RC -Reihenschaltung als die Zeit, bei der die Spannung am Kondensator beim Entladen auf $(1 - 1/e)$ gesunken bzw. beim Laden auf $1/e$ angestiegen ist. Es ist

$$\tau = R \cdot C \quad (9)$$

Theoretisch ist auch nach einer sehr langen Lade- bzw. Entladezeit ein Kondensator nicht vollständig ge- bzw. entladen. Für praktische Anwendungen ist allerdings die Zeit 5τ ausreichend um die vollständige Ladung bzw. Entladung des Kondensators anzunehmen da hier die Spannung am Kondensator auf 99.3% gestiegen bzw. auf 0.7% gefallen ist.

Die Impedanz des Kondensators Betrachtet man einen Kondensator an den eine harmonische Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ angelegt wird, so ergibt sich für den Strom „über“ dem Kondensator:

$$I(t) = \frac{d}{dt}Q(t) = C \frac{d}{dt}U(t) = i\omega CU(t)$$

Die Impedanz des Kondensators Z_C ist so einfach gegeben durch

$$Z_C = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{1}{i\omega C} \frac{U(t)}{U(t)} = -i \frac{1}{\omega C} \quad (10)$$

Die Impedanz des Kondensators ist demnach eine rein komplexe Größe. Der Scheinwiderstand des Kondensators entspricht dem Blindwiderstand und ist reziprok frequenzabhängig. Für hochfrequente Spannungen und den damit verbundenen Strömen stellt der Kondensator demnach nur einen geringen Widerstand dar. Der Scheinwiderstand des Kondensators wird für kleine Frequenzen sehr groß und stellt für $\omega \rightarrow 0$ einen unendlich hohen Widerstand $|Z| \rightarrow \infty$ dar. Dies deckt sich mit dem Modell des Kondensators als Plattenkondensator, der im Gleichstromkreis eine Unterbrechung des Stromkreises darstellt.

Die Phase zwischen Spannung und Strom ergibt sich als $\phi = -\pi/2$, die Spannung läuft dem Strom „hinterher“.

2.2.2 Die Spule

Um einen stromdurchflossenen Leiter bildet sich nach dem Ampereschen Gesetz ein magnetisches Feld. Die Feldstärke wird hierbei durch die Stromstärke bestimmt. Eine Veränderung des Stroms bewirkt also eine Veränderung des magnetischen Feldes um den Leiter. Nach dem Induktionsgesetz wird durch die Veränderung des magnetischen Feldes, genauer durch eine Änderung des Magnetischen Flusses, eine Spannung in den Leiter induziert. Für diese gilt

$$U = L \frac{dI}{dt}$$

Um den Effekt zu verstärken wird der Leiter häufig in mehreren Leiterschleifen als Spule angeordnet. Die Eigeninduktivität L ist die charakteristische Größe zur Beschreibung einer Spule. Sie hängt von der Spulenform, dem Spulenkern und der Windungszahl ab. Das Vorzeichen der induzierten Spannung ist konventionsabhängig, also von der Richtung des sich ändernden Stroms und der Spannungsmessung abhängig. Wichtig ist hierbei, dass die induzierte Spannung so gerichtet ist, dass sie dem sich ändernden Strom entgegenwirkt.

Betrachtet man nun einen periodischen Wechselstrom, der an die Spule angelegt wird, so folgt unmittelbar für die Spannung an der Spule:

$$U(t) = L \frac{d}{dt}I(t) = i\omega LI(t)$$

Für die Impedanz der Spule Z_L folgt hieraus sofort

$$Z_L = \frac{U(t)}{I(t)} = i\omega L \frac{I(t)}{I(t)} = i\omega L \quad (11)$$

Der Scheinwiderstand der Spule entspricht wie beim Kondensator auch dem Blindwiderstand. Dabei ist der Scheinwiderstand proportional zur angelegten Frequenz. Für hohe

Frequenzen stellt die Spule somit einen großen Widerstand dar, während der Widerstand für kleine Frequenzen sehr gering ist. Hier gilt für $\omega \rightarrow 0$, dass $|Z| \rightarrow 0$. Dies deckt sich mit dem Bild einer Spule, die im Gleichstromkreis keinen Einfluss hat.

Anders als beim Kondensator ergibt sich für die Spule eine Phase von $\phi = -\pi/2$ zwischen Spannung und Strom. Hier eilt die Spannung dem Strom voraus.

2.3 RC-Filter

Die einfachsten Filter, ein Hoch- und Tiefpassfilter, lassen sich aus der Reihenschaltung von Widerstand und Kondensator realisieren. Hierbei wird an ein RC-Glied eine Wechselspannung und die Spannung entweder über der Spule oder über dem ohmschen Widerstand abgegriffen.

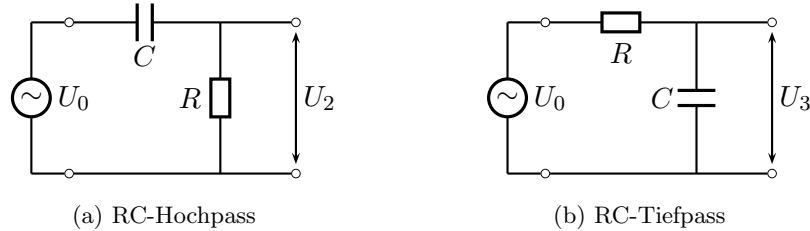


Abbildung 1: Schaltbilder der RC-Filterschaltungen. Die „gefilterte“ Spannung wird entweder über dem ohmschen Widerstand oder dem Kondensator abgegriffen. (Nach [APScr])

Die Reihenschaltung aus den Impedanzen wirkt im Wechselstromkreis wie ein (frequenzabhängiger) Spannungsteiler. Wir sind im Fall des Hochpassfilters an der Spannung über dem Widerstand, im Falle des Tiefpasses an der Spannung über der Kapazität interessiert. Nach der Knotenregel ergibt sich der Strom in jedem Punkt der Schaltung aus der Ersatzimpedanz beider Bauteile und der Quellspannung $U_0 = U_0(t)$:

$$I(t) = \frac{U_0(t)}{Z_R + Z_C}$$

Für den Spannungsabfall über dem Widerstand gilt:

$$U_2(t) = Z_R \cdot I(t)$$

Analog gilt für den Spannungsabfall über der Kapazität:

$$U_3(t) = Z_C \cdot I(t)$$

Interessant für die Filterschaltungen ist die Übertragungsfunktion $H(\omega)$, welche sich aus dem Amplitudenverhältnis von abgegriffener und zugeführter Spannung ergibt. Im Falle des Hochpasses ergibt sich die Übertragungsfunktion H_H als

$$H_H = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} = \frac{R}{R - \frac{i}{\omega C}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} e^{i\varphi} \quad \tan(\varphi) = \frac{1}{\omega RC} \quad (12)$$

Für den Tiefpass ergibt sich die Übertragungsfunktion H_T als

$$H_T = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\frac{-i}{\omega C}}{R - \frac{i}{\omega C}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{i\varphi} \quad \tan(\varphi) = \omega RC \quad (13)$$

Die Übertragungsfunktion liefert ähnlich wie die Betrachtung der Impedanz sowohl das Amplituden- als auch das Phasenverhältnis von abgegriffener und angelegter Spannung.

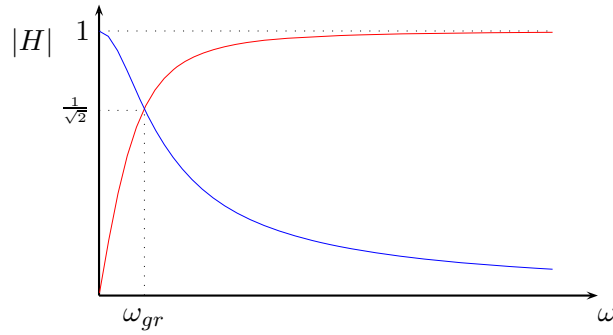


Abbildung 2: Der Betrag der Übertragungsfunktion für einen RC-Hochpass ($|H_H|$, rot) und einen RC-Tiefpass ($|H_T|$, blau).

Die graphische Auswertung aus (2) des Betrags der Übertragungsfunktionen für eine beliebige Kombination aus Kondensator und Widerstand liefert sowohl die Begründung zur Benennung der Schaltungen, als auch eine ausgezeichnete Frequenz ω_{gr} bei der das Amplitudenverhältnis beider Schaltungen den gleichen Wert annimmt. Ein Blick auf die Formeln der Übertragungsfunktionen liefert, dass für ω_{gr} gelten muss:

$$\frac{1}{\omega_{gr}RC} = \omega_{gr}RC$$

woraus sich diese Frequenz einfach berechnen lässt. Eingesetzt in eine der beiden Übertragungsfunktionen liefert dies so

$$\omega_{gr} = \frac{1}{RC} \quad |H(\omega_{gr})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (14)$$

Die Frequenz ω_{gr} wird als Grenzfrequenz oder CutOff-Frequenz bezeichnet. Sie ergibt sich direkt als das Reziproke der Zeitkonstante τ eines RC-Glieds. Die Leistung eines elektrischen Signals mit der Grenzfrequenz wird durch einen Hoch- bzw. Tiefpass gerade auf die Hälfte der Ursprungsleistung reduziert.

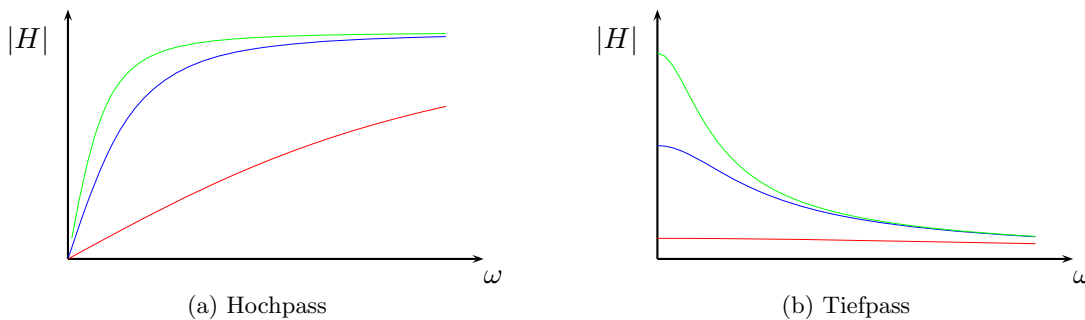


Abbildung 3: Betrag der Übertragungsfunktion von Hoch- und Tiefpass für die Belastung der Filter mit einem ohmschen Widerstand R_L . Dargestellt sind die Fälle $R_L < R$ (rot), $R_L = R$ (blau) und $R_L > R$ (grün), wobei R der Widerstand des RC-Gliedes ist.

Alle Rechnungen bezüglich der RC-Filter gehen von einem unbelasteten Ausgang aus. Wird der Ausgang der Filterschaltung durch ein weiteres Bauteil belastet, so muss die Impedanz des Bauteils bei der Berechnung der resultierenden Amplitude berücksichtigt werden. Die Übertragungsfunktionen für belastete RC-Filterschaltungen sind in Abbildung (3) dargestellt. Eine niederohmige Belastung, also die Belastung der Filterschaltung durch ein Bauteil mit einer hohen Leistung, führt sowohl beim Hochpass als auch beim Tiefpass zu einer starken Veränderung der Übertragungsfunktion und somit zu einer Einschränkung der gewünschten Funktionalität des Filters. Hochohmige Belastungen (wie beispielsweise eine Messung mit einem Voltmeter mit hoher Eingangsimpedanz) verändern die Eigenschaften nur geringfügig.

2.4 LC-Filter

Die Filterschaltungen mit Spule und Kondensator sind gegenüber den bereits vorgestellten Filtern aus Widerstand und Kapazität etwas leistungsfähiger. Der Aufbau von LC-Hoch- und Tiefpass ähnelt dem der RC-Schaltungen wobei hierbei der Widerstand durch eine Spule ersetzt wird.

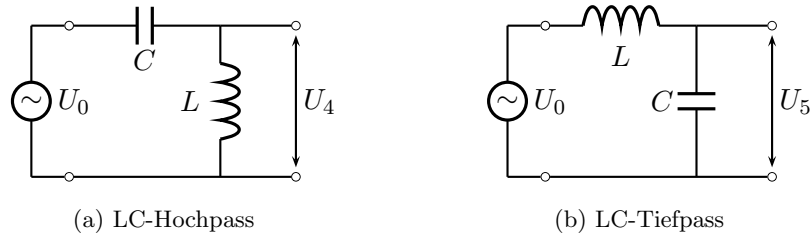


Abbildung 4: Schaltbilder der LC-Filterschaltungen. Die „gefilterte“ Spannung wird entweder über der Spule oder dem Kondensator abgegriffen. (Nach [APScr])

Unbelastete Filter Die Übertragungsfunktionen der unbelasteten Filter lassen sich für die LC-Filterschaltungen auf analogem Wege zu den RC-Filtern ermitteln. Für den LC-Hochpass $H_{H,LC}$ ergibt sich die Übertragungsfunktion zu

$$H_{H,LC} = \frac{Z_L}{Z_L + Z_C} = \frac{1}{|1 - \frac{1}{\omega^2 LC}|} e^{i\varphi_H} \quad (15)$$

Die Übertragungsfunktion des LC-Tiefpasses $H_{T,LC}$ hingegen ist gegeben durch:

$$H_{T,LC} = \frac{Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{1}{|1 - \omega^2 LC|} e^{i\varphi_T} \quad (16)$$

wobei auf die Phasen der Übertragungsfunktionen noch unbestimmt bleiben.

Einfach zu erkennen ist, dass es sowohl bei der Übertragungsfunktion des Hochpass als auch der des Tiefpasses eine Frequenz ω_{gr} gibt, an der die Funktionen einen singulären Punkt aufweisen. Diese Frequenz ist bei beiden Fällen durch

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (17)$$

gegeben. Hat die angelegte Spannung die Frequenz ω_0 ist die Spannung am Ausgang theoretisch (mit der Vernachlässigung aller ohmschen Widerstände) unbegrenzt.

Die Phase zwischen angelegter und abgegriffener Spannung kann durch die genauere Betrachtung der Gleichungen (15) und (16) ermittelt werden. Für die Summe aus Z_L und Z_C gilt:

$$i\omega L - \frac{i}{\omega C} = i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| \exp \left(i \operatorname{sgn} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{\pi}{2} \right)$$

Die Phasen der Übertragungsfunktionen hängen vom Vorzeichen des Terms $\omega L - 1/(\omega C)$ ab. Genauer gilt für die Phasen mit der Identität $\operatorname{sgn}(\omega L - 1/(\omega C)) = \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0)$

$$\varphi_H = \frac{\pi}{2} + \operatorname{sgn} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{\pi}{2} = \Theta(\omega - \omega_0)\pi$$

für die Phase der Übertragungsfunktion des Hochpasses und analog

$$\varphi_T = -\Theta(\omega_0 - \omega)\pi$$

für die Phase des Tiefpasses, wobei $\Theta(x)$ die Heaviside-Funktion repräsentiert. Allgemein gilt am LC-Hoch- bzw. Tiefpass, dass die abgegriffene Spannung im Sperrbereich des Filters um 180° verschoben zur angelegten Spannung ist.

Belasteter Filter Die Spannungserhöhung einer Wechselspannung im Bereich der Grenzfrequenz eines LC-Filters ist in der Regel nicht beabsichtigt und wird sofort vermindert, sobald entweder ein zusätzlicher Widerstand zwischen Kondensator und Spule gebracht oder der Filter belastet wird. Da nur der zweite Fall im Praktikum gemessen wurde soll hier kurz darauf eingegangen werden.

Schließt man den Ausgang des Filters mit einem zusätzlichen ohmschen Widerstand R_L kurz, so muss dieser bei der Berechnung der über dem Ausgang gemessenen Spannung berücksichtigt werden. Für den LC-Hochpass kann nun mit analogen Überlegungen wie im unbelasteten Fall das Spannungsverhältnis am Ausgang durch

$$\frac{U_A}{U_0} = \frac{Z_E}{Z_C + Z_E}$$

beschrieben werden, wobei die Ersatzimpedanz Z_E durch

$$Z_E = \left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{i\omega L} \right)^{-1}$$

gegeben ist. Der Betrag der Übertragungsfunktion und damit das Amplitudenverhältnis kann so berechnet werden. Es gilt:

$$|H_{H,LC}| = \sqrt{\frac{\omega^4 \beta^2}{\beta^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \omega^2}} \quad (18)$$

wobei hier die Abkürzung

$$\beta := \frac{R_L}{L}$$

genutzt wurde. Für den LC-Tiefpass erhält man auf analogem Wege den Betrag der Übertragungsfunktion als

$$|H_{T,LC}| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 \beta^2}{\beta^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \omega^2}} \quad (19)$$

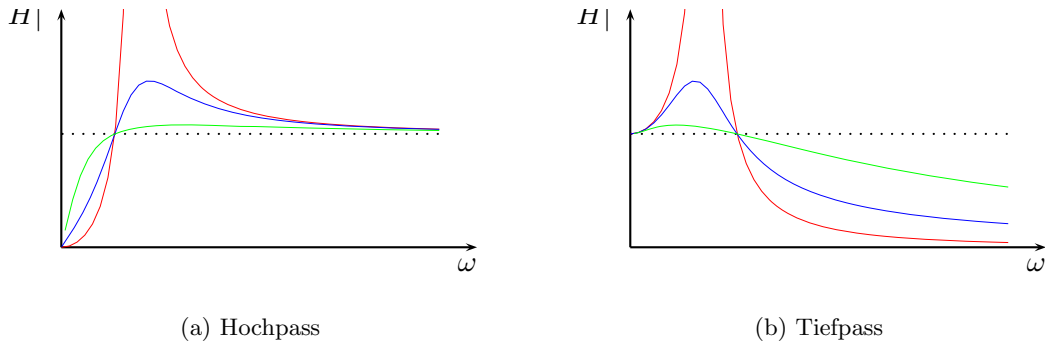


Abbildung 5: Betrag der Übertragungsfunktion von LC Hoch- und Tiefpass für die Belastung der Filter mit einem ohmschen Widerstand R_L . Dargestellt sind die Fälle $R_L \approx 0$ (rot), $R_L = \omega_0 L$ (blau) und $R_L > \omega_0 L$ (grün). Die gepunktete Linie entspricht dem Wert 1.

Die Verläufe der Übertragungsfunktionen der LC-Filterschaltungen aus Abbildung (5) zeigen, dass die Belastung des LC-Filters zur Abflachung der Filterflanke führt. Allgemein gilt, dass die Überspannung am Ausgang des Filters durch eine höhere Last am Anfang verringert werden kann. Eine vollständige Vermeidung ist allerdings nicht möglich.

3 Versuch und Auswertung

Ziel des Versuchs ist die Bestätigung der durch die Theorie vorhergesagten Werte für Messungen an verschiedenen passiven Filterschaltungen. Es wurden Messungen an verschiedenen RC-Gliedern, sowie an Hoch- und Tiefpassfilter, realisiert durch die im Grundlagenteil vorgestellten RC- bzw. LC-Schaltungen, vorgenommen.

Als Gleichspannungsquelle im ersten Versuchsteil und Wechselspannungsquelle bei den folgenden Messungen wurde ein Funktionsgenerator genutzt. Die eigentlichen Messungen wurde mit einem Zwei-Kanal-Oszilloskop vorgenommen. Dies ermöglicht auf der einen Seite eine relativ exakte Bestimmung von Zeiten zur Frequenzbestimmung und andererseits die gleichzeitige Messung der Amplituden der Spannung am Aus- und Eingang der Schaltungen. Generell kann für die Messung mit dem Oszilloskop ein Ablesefehler von $\delta \approx 0.1 \text{ div}$ angenommen werden. Je nach Skalierung der Zeitachse und der Spannungseinstellungen für den spezifischen Eingang des Oszilloskops ergibt sich hieraus der Fehler der Einzelmessung. Diese Annahme bildet die Grundlage für alle angegebenen Fehler in den direkten Rechnungen.

3.1 Bestimmung der Zeitkonstante

Zur experimentellen Bestimmung der Zeitkonstante verschiedene RC-Glieder wurde im wesentlichen die Schaltung für einen RC-Hochpass aus Abbildung (1) mit verschiedenen

Kombinationen aus Widerstand R und Kapazität C verwendet. Allerdings wurde hier nicht die in Abb. (1) eingezeichnete Wechselspannungsquelle sondern eine Rechteckspannungsquelle verwendet. Auch wurde nicht der Ein- bzw. Ausschaltvorgang gemessen, sondern vielmehr die Umpolung der Spannung. Da hier nach wie vor die für das RC-Glied aufgestellte Differentialgleichung aus Gleichung (8) mit den Randbedingungen

$$U_q(t_0) = \mp U_0 \quad U_C(t_0) = \pm U_0$$

für das Umpolen zur Zeit $t = t_0$ der Spannung gilt, wobei die unterschiedlichen Vorzeichen je nach Polung der Rechteckspannung zu bestimmen sind, gilt allgemein für die Spannung am Kondensator in einem Bereich mit konstanter Quellspannung:

$$U_c(t) = \pm 2U_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Aufgrund der einfacheren Messmethode wurde im Versuch nun die Zeitspanne ΔT (als „Halbwertszeit“) bestimmt, bei der die Spannung über dem Kondensator verschwand. Hieraus folgt:

$$0 \stackrel{!}{=} \pm 2U_0 \left(1 - 2e^{-\frac{\Delta T}{\tau}}\right) \Rightarrow \tau = \frac{\Delta T}{\ln(2)}$$

Tabelle (1) stellt die im Versuch gemessenen und die daraus errechneten Werte dar. Als

C in nF	R in $k\Omega$	ΔT in μs	τ in μs	τ_{ref} in μs	$\Delta\tau/\tau_{ref}$ in %
47	4	150(50)	216(72)	188	15
47	10	400(50)	577(72)	470	23
74.3	4	250(50)	361(72)	297	21
74.3	7	400(50)	577(72)	520	11
74.3	10	500(50)	721(72)	743	3
74.3	15	700(100)	1010(144)	1115	9
74.3	20	1000(100)	1443(144)	1486	3

Tabelle 1: Die Messwerte und die daraus bestimmte Zeitkonstante τ für die Messung am RC-Glied. Angegeben sind die Werte der verwendeten Bauteile R und C , sowie die gemessene Halbwertszeit ΔT , die daraus errechnete Zeitkonstante τ und die theoretisch ermittelten Referenzwerte τ_{ref} . Der angegebene Fehler entsteht durch eine Ablesegenauigkeit von $\delta = 0.1div$.

Referenz ist der durch die Angaben auf den Bauteilen errechnete Wert für die Zeitkonstante τ_{ref} und der prozentuale Fehler der gemessenen τ zu den Referenzwerten angegeben. Der Vergleich der gemessenen Werte mit den theoretisch ermittelten zeigt die relativ große Ungenauigkeit der Messungen für kleine Widerstände. Für die relativ hohen Widerstände lieferten die Messungen nahezu die erwarteten Werte. Zu bemerken ist hier allerdings, dass nur bei einer Messung der theoretisch ermittelte Wert knapp nicht im Fehlerintervall des Messwertes liegt. Dies ist auch die Messung mit der größten relativen Abweichung.

3.2 Messungen an den RC-Filtern

Für die Messungen an den RC-Filtern wurden diese wie in Abbildung (1) aufgebaut. Ein Funktionengenerator lieferte hierbei eine sinusförmige Wechselspannung mit variabler

Frequenz. Für verschiedene Einstellungen wurde mit Hilfe des Oszilloskops die genaue Frequenz der angelegten Wechselspannung über die Periodendauer, die Amplitude der angelegten Spannung und die Amplitude der Spannung am Ausgang der Schaltung gemessen. Beide Filter wurden mit den Bauteilen

$$R = 600\Omega \quad C = 47nF$$

realisiert.

Die für unterschiedliche Periodendauern gemessenen Werte sind dem Meßprotokoll der zweiten Messung zu entnehmen. Die Messwerte sind die Grundlage für die Durchlasskurven der Hoch- und Tiefpassschaltungen aus Abbildung (6).

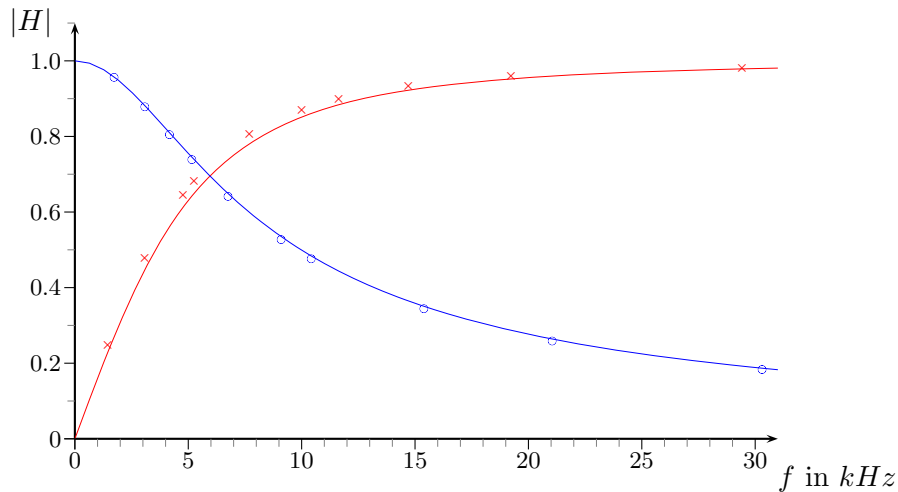


Abbildung 6: Graphische Darstellung des gemessenen Amplitudenverhältnisses an den RC-Filtern. Hierbei ist der Hochpass rot und der Tiefpass blau dargestellt.

Die Graphen aus Abbildung (6) wurden mit dem Hilfsmittel der funktionalen Regression an die Messwerte angepasst, wobei für den funktionalen Zusammenhang die Formel (12) die Grundlage bildet. Die Messwerte der Hochpassschaltung wurden an

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{f}\right)^2}}$$

sowie die der Tiefpassschaltung an

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{t}\right)^2}}$$

angepasst. Aus der Regression ergeben sich die folgenden Werte für die unbestimmten Koeffizienten

$$h = 6164(175) \quad t = 5762(165)$$

Einfach zu erkennen ist, dass sowohl der Koeffizient h als auch der Koeffizient t der Grenzfrequenz f_{gr} entspricht. Für diese gilt

$$f_{gr} = \frac{\omega_{gr}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

Die Werte der Kapazität und des ohmschen Widerstandes der verwendeten Bauteile sind bekannt, so dass sich die theoretische Grenzfrequenz der RC-Schaltungen als

$$f_{gr} \approx 5643Hz$$

berechnen lässt. Die Messungen beider Schaltungen liefern zu große Werte für die Grenzfrequenz, die allerdings weniger als 10% Abweichung zum berechneten Wert aufweisen. Während des Versuchs wurde die Grenzfrequenz graphisch als

$$f_{gr} \approx 5.5kHz$$

bestimmt.

Die Messungen der Phasen bei der Hoch und Tiefpassschaltung lieferten das erwartete Ergebnis. So konnte die Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgang der Hochpassschaltung als

$$\varphi(1.5kHz) = 78^\circ \quad \varphi(5.6kHz) = 49^\circ \quad \varphi(23.3kHz) = 14^\circ$$

sowie für die Tiefpassschaltung als

$$\varphi(1.5kHz) = 17^\circ \quad \varphi(5.6kHz) = 44^\circ \quad \varphi(23.3kHz) = 82^\circ$$

bestimmt werden. Wie erwartet beträgt die Phase bei der Grenzfrequenz ungefähr 45° , während die Phase für Frequenzen im Sperrbereich des Filters gegen 90° und im Durchlassbereich gegen 0° geht. Als Referenz liefert die theoretische Berechnung der Phase für den Hochpass bei den gemessenen Frequenzen

$$\varphi(1.5kHz) \approx 74^\circ \quad \varphi(5.6kHz) \approx 46^\circ \quad \varphi(23.3kHz) \approx 12^\circ$$

und für den Tiefpass

$$\varphi(1.5kHz) \approx 15^\circ \quad \varphi(5.6kHz) \approx 44^\circ \quad \varphi(23.3kHz) \approx 77^\circ$$

Die gemessenen und errechneten Werte unterscheiden sich demnach um weniger als 5° .

3.3 Messungen an den LC-Filtern

Für die Messungen der LC-Filterschaltungen wurden diese wie in Abbildung (4) aufgebaut. In einer ersten Meßreihe wurde nun die Grenzfrequenz des Hochpassfilters ermittelt. Hierzu wurden mehrere Messungen der Spannungsamplitude der Spannungsquelle und am Ausgang des unbelasteten Filters vorgenommen. Die graphische Auswertung lieferte hierbei eine Grenzfrequenz von

$$f_0 \approx 8.1kHz$$

Mit den bekannten Werten der verwendeten Bauteile

$$L = 9.55mH \quad C = 47nF$$

kann nun mit Hilfe von

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

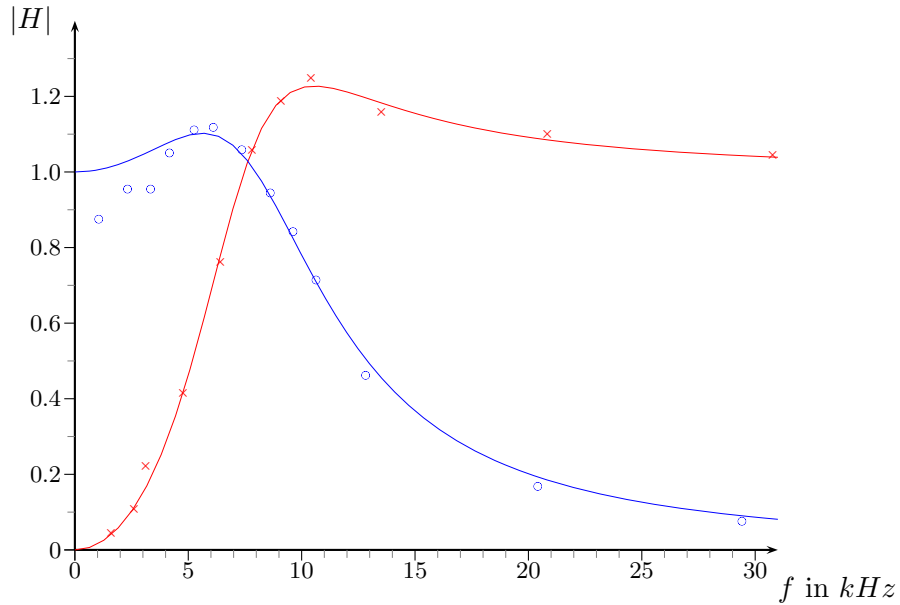


Abbildung 7: Graphische Darstellung der gemessenen Amplitudenverhältnisse an den LC-Filtern. Hierbei ist der Hochpass rot und der Tiefpass blau dargestellt.

die Grenzfrequenz f_0 des Filters berechnet werden. Es ist:

$$f_0 \approx 7.51 \text{ kHz}$$

Für die weitere Auswertung wurden die Filter nun mit einem ohmschen Widerstand belastet um die Überspannung am Ausgang zumindest teilweise abzufachen. Die gemessenen Werte bilden die Grundlage für die Durchlasskurven aus Abbildung (7).

Wie schon bei der Auswertung der Durchlasskurven der LC-Filter, entstehen die Graphen durch die Regression der Messwerte. Der funktionale Zusammenhang ist hier durch Formel (18) gegeben. Die Regression liefert neben dem eher uninteressanten Koeffizienten β auch die Grenzfrequenz f_0 . Für die Regression der Hochpassdurchlasskurve erhält man

$$f_{0,H} = 8039(250)$$

sowie für die Regression der Tiepasskurve

$$f_{0,T} = 8687(752)$$

Bei beiden Werten liegt der ohne Belastung ermittelte Wert für die Grenzfrequenz im einfachen Fehlerintervall. Der aus den Angaben der Bauteile ermittelte Wert wird allerdings nicht mehr durch das einfache Fehlerintervall abgedeckt. Mit einer maximalen Abweichung von 16% zeigen die Messwerte zum theoretisch ermittelten Wert für die Grenzfrequenz aber noch eine akzeptable Abweichung.

Die Messungen der Phasen an den LC-Filtern liefern die erwarteten Ergebnisse. Für den Hochpass wurden die Phasen

$$\varphi(1.4 \text{ kHz}) = 147^\circ \quad \varphi(8.1 \text{ kHz}) = 88^\circ \quad \varphi(27.7 \text{ kHz}) = 15^\circ$$

bestimmt. Das Phasenverschiebung durch den Tiefpass ergab sich zu:

$$\varphi(1.2 \text{ kHz}) = 8^\circ \quad \varphi(8.1 \text{ kHz}) = 88^\circ \quad \varphi(27.7 \text{ kHz}) = 165^\circ$$

Wie erwartet ist die Spannung am Filterausgang im Sperrbereich um nahezu eine halbe Periode verschoben. Im Durchlassbereich beträgt die Phasenverschiebung weniger als 90° , während in der Umgebung der Grenzfrequenz die Phase gerade den Wert 90° annimmt.

3.4 Fehlerdiskussion

Die im Versuch gemessenen Werte sind im Großen und Ganzen als verlässlich einzuordnen. Hierbei ist zu erwähnen, dass die Werte einer ersten Messung verworfen wurden, da bei dieser eine falsche Einstellung am Kanal des Filterausgangs am Oszilloskop nicht verlässliche Werte lieferte. Diese Fehleinstellung wirkte sich auf alle Meßwerte aus, so dass alle Meßwerte erneut erhoben wurden. Alle Angaben und Rechnungen beziehen sich deshalb auf die „neueren“ Messungen.

Bei der Bestimmung der Zeitkonstante für verschiedene RC-Kombinationen fällt auf, dass die Messungen mit einem geringen ohmschen Widerstand einen größeren Fehler aufweisen als die mit einem hochohmigen Widerstand in der Schaltung. Ursache hierfür ist die Zeitkonstante dieser Schaltungen, die mit einer sehr groben Zeitauflösung des Oszilloskops nachgewiesen werden musste. Eine Messung mit höheren Widerständen ist zwar generell zu realisieren, erwies sich aber als schwierig, da die Triggerung des Oszilloskops nur auf einen Spannungswert einstellbar ist. Am Schirm des Oszilloskops muss deshalb ein vollständiger Rechtecksimpuls dargestellt werden. Innerhalb dieses Impulses muss die Spannung am Kondensator allerdings nahezu auf den anliegenden Wert der Spannung geladen bzw. entladen werden. Messungen bei denen der Zeitwert für die Halbwertszeit zwei Zeitskaleneinheiten überschreitet sind so kaum möglich. In Anbetracht dieser Einschränkung ergaben sich allerdings akzeptable Ergebnisse.

Die Messungen an den RC-Filtern sind als relativ gut einzuschätzen. Dies zeigt die relativ genaue Approximation der Messwerte durch die Regressionsfunktionen. Lediglich die aus den Angaben der Bauteile berechnete Grenzfrequenz ist abweichend zu den aus den Messungen approximierten Werten. Allerdings ist hierbei zu beachten, dass elektronische Bauteile meist eine Abweichung vom angegebenen Wert um bis zu 10% aufweisen. Da die Meßwerte konsistent sind, ist die Abweichung der Grenzfrequenzen wahrscheinlich teilweise auf die Bauteile zurückzuführen. Zudem wurde zur Berechnung von vollständig idealen Schaltungen ausgegangen, die sich unter den Versuchsbedingungen kaum realisieren lassen.

Auch im Fall der Messungen der LC-Filterschaltungen ist eine Abweichung der Bauteile zu den angegebenen Werten nicht auszuschließen. Hierfür spricht auch, dass auch bei diesen Messungen die aus den Messungen errechneten Werte konsistent sind. Allerdings ist an den Meßwerten und der „angepassten“ Funktion zu erkennen, dass bei der Messung manche Werte von der Regressionfunktion abweichen. Die größte Abweichung ist bei den Messwerten des LC-Tiefpassfilters im Durchlassbereich zu entdecken. Hier können die gemessenen Werte nicht durch den funktionalen Zusammenhang beschrieben werden und liegen unterhalb der erwarteten Werte. Ein Grund hierfür könnten Resonanzeffekte zwischen Bauteilen und Spannungsquelle und Oszilloskop sein, die in der Theorie nicht berücksichtigt werden.

4 Verzeichnisse

4.1 Literaturverzeichnis

[APScr] B. Runge *Versuchsanleitung zu den elektrischen Schwingungssieben*

[WiTP] Verschiedene 17. Juni 2007 *Tiefpass* - *Wikipedia*
<http://de.wikipedia.org/wiki/Tiefpass>

[WiHP] Verschiedene 17. Juni 2007 *Hochpass* - *Wikipedia*
<http://de.wikipedia.org/wiki/Hochpass>

[WiKo] Verschiedene 17. Juni 2007 *Kondensator_(Elektrotechnik)* - *Wikipedia*
[http://de.wikipedia.org/wiki/Kondensator_\(Elektrotechnik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Kondensator_(Elektrotechnik))

[WiSp] Verschiedene 17. Juni 2007 *Spule_(Elektrotechnik)* - *Wikipedia*
[http://de.wikipedia.org/wiki/Spule_\(Elektrotechnik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Spule_(Elektrotechnik))

[APSK] A.HASENKAMPF,T.LORENZ *Protokoll zum elektrischen Schwingkreis*