

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Physikalische Grundlagen	2
2.1	Ladung, Strom und Spannung	2
2.1.1	Stationäre Spannungen und Ströme	2
2.2	Veränderliche Spannungen und Ströme	3
2.3	Bauteile im Wechselstromkreis	3
2.3.1	Die Impedanz	4
2.3.2	Die Kapazität	4
2.3.3	Die Induktivität	5
2.3.4	Die Kirchhoffschen Regeln	6
2.4	Elektrische Schwingungen	6
2.4.1	Der Schwingkreis	6
2.4.2	Die Schwingungsgleichung	7
2.4.3	Freie Schwingungen	7
2.4.4	Erzwungene Schwingungen	9
3	Versuch und Auswertung	11
3.1	Langsame gedämpfte Schwingungen	12
3.2	Schnelle gedämpfte Schwingungen	13
3.3	Erzwungene Schwingungen	14
3.4	Fehlerdiskussion	14
4	Fragen	16
5	Verzeichnisse	16
5.1	Literaturverzeichnis	16

Anhang A: Messprotokoll aus dem Praktikum

1 Einleitung

Einfache Resonatoren sind für die physikalische Beschreibung vieler Phänomene von grundlegender Bedeutung. Einen der einfachsten elektrischen Resonatoren stellt der Schwingkreis aus Spule und Kondensator dar. An ihm können alle, für harmonische Oszillatoren typische Verhalten untersucht werden. Da sich viele Phänomene in Natur und Technik auf Schwingungen von Oszillatoren zurückführen lassen, liefert die Untersuchung des Schwingkreises eine auf viele Gegebenheiten anwendbare Beschreibung elektrischer Schwingungen.

2 Physikalische Grundlagen

Im Folgenden sollen die zur Erklärung der Phänomene am Schwingkreis wichtigen physikalischen Grundlagen genannt und erläutert werden.

2.1 Ladung, Strom und Spannung

Alle Phänomene im Bezug auf die Elektrizität lassen sich durch die Anwesenheit und Bewegung von Ladungen zurückführen. Mit dem Wissen über die Quantisierung der Ladungsträger ließen sich so alle benötigten Zusammenhänge aufgrund der Bewegung von negativ geladenen Elektronen in einem Leiter erklären. Dies erweist sich allerdings als ein sehr aufwendiges Verfahren zur Beschreibung elektrischer Vorgänge, da hier die Bewegung vieler Ladungsträger untersucht werden müsste. Die Einführung von makroskopisch messbaren, kontinuierlichen Größen führt zu einer Erleichterung.

2.1.1 Stationäre Spannungen und Ströme

Zur Beschreibung von bewegten Ladungen in einem Leiter wird die elektrische Stromstärke I eingeführt. Die Stromstärke ergibt sich aus der differentiellen Beschreibung der Ladung Q , die in einem Zeitabschnitt den Leiterquerschnitt passiert.

$$I = \frac{d}{dt}Q = \dot{Q} \quad [I] = 1A \quad (1)$$

Auch wenn die Ladung keine kontinuierliche Größe ist, so kann die Quantisierung durch die Elementarladung vernachlässigt werden, da sehr viele Ladungsträger für einen kleinen Strom verantwortlich sind.

Nun stellt sich die Frage, weshalb überhaupt Ladungen bewegt werden. Aus der Betrachtung freier Ladungen weiß man, dass sich gleichnamige Ladungen abstoßen, sowie gegensätzliche Ladungen anziehen. Diese elektrische Kraft kann durch ein elektrisches Potential beschrieben werden. Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten wird dann als elektrische Spannung U definiert. Sie entspricht der Arbeit die pro Ladung verrichtet werden muss um diese von einem zum anderem der Punkte zu bewegen.

$$U = \frac{dW_{A \rightarrow B}}{dQ} \quad [U] = 1 \frac{J}{C} = 1V \quad (2)$$

Strom und Spannung können sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Das Vorzeichen ist hierbei in den meisten Fällen eine Frage der Konvention. In der Zeit nicht

veränderliche Spannungen und Ströme werden als Gleich-Ströme bzw. Spannungen bezeichnet.

Mittels Strom und Spannung in einem Stromkreis kann die elektrische Leistung, also die Arbeit die durch die Bewegung der Ladungsträger pro Zeiteinheit verrichtet wird, sehr einfach ermittelt werden. Die elektrische Leistung ergibt sich aus Produkt von Strom und Spannung. Es ist

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dt} = U \cdot I \quad (3)$$

2.2 Veränderliche Spannungen und Ströme

Interessanter als die Beschränkung auf stationäre Spannungen und Ströme ist die Betrachtung von zeitlich veränderlichen Größen. Hierbei ist sowohl die Spannung als auch der Strom eine Funktion von der Zeit. Beide sind stetig in der Zeit.

Ein spezieller Spannungsverlauf ist durch die harmonische Wechselspannung gegeben. Alle anderen Spannungsverläufe sind durch die Überlagerung verschiedener harmonischer Spannungen mittels Fourieranalyse darstellbar. Für die Darstellung solcher Spannungsverläufe hat sich die komplexe Exponentialfunktion als besonders nützlich erwiesen. Dies führt auf die Darstellung einer Wechselspannung mit der Kreisfrequenz ω und der Phase ϕ als

$$U(t) = \hat{U} e^{i(\omega t + \phi)}$$

Die physikalisch messbare Spannung entspricht dem Realteil dieser komplexen Spannung und osilliert zwischen $-\hat{U}$ und \hat{U} . Analog wird ein komplexer Wechselstrom definiert.

Die Momentanleistung $P(t)$ im Wechselstromkreis ergibt sich auch hier aus dem Produkt von messbarem Strom und Spannung. Interessanter als die Momentanleistung ist die durchschnittliche Wirkleistung. Diese ergibt sich aus der Mittelung über eine Periode:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt U(t) \cdot I(t)$$

Neben der Wirkleistung, welche bedeutet dass wirksam Arbeit verrichtet wird, ergibt sich aus dem Imaginärteil des Produkt von komplex konjugiertem Strom und komplexer Spannung die Blindleistung Q . Diese wird zwar aufgenommen aber nicht in Arbeit umgesetzt. Die Scheinleistung S als komplexe Größe ergibt sich aus dem Produkt von komplex konjugiertem Strom und Spannung. Sie hat als Realteil die Wirkleistung und als Imaginärteil die Blindleistung. Der Betrag der Scheinleistung beschreibt die in einem Stromkreis aufgenommene Leistung.

In der Wechselstromrechnung können periodischen Wechselströmen und Wechselspannungen Effektivwerte zugewiesen werden. Hierzu wird die durchschnittliche Wirkleistung von Wechselströmen an einem Verbraucher mit der Leistung des Gleichstroms verglichen. Dies führt zur Definition der Effektivwerte von Strom und Spannung. Einem sinusförmigen Strom mit der Amplitude I_0 wird der Effektivwert $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ zugeordnet. Analoges gilt für die Spannung.

2.3 Bauteile im Wechselstromkreis

Betrachtet man die Bewegung von Ladungen in einem realen Leiter genauer, so fällt auf, dass Spannung und Strom im Leiter in einem festen Verhältnis zueinander stehen. Mikroskopisch gesehen wird die Bewegung der Ladungsträger durch Stöße mit den Atomen des

Leiters gebremst, so dass sich beim Anlegen einer Spannung an den Leiter ein begrenzter Strom einstellt. Makroskopisch wird dieses Verhalten durch den ohmschen Widerstand R eines Bauteils beschrieben. Es gilt

$$R = \frac{U}{I} \quad [R] = 1 \frac{V}{A} = 1 \Omega \quad (4)$$

Dies gilt für Wechselströme und -spannungen gleichermaßen.

2.3.1 Die Impedanz

In der komplexen Wechselstromrechnung wird in Analogie zur Definition des Widerstands das Verhältnis aus komplexer Spannung und Strom als komplexer Widerstand oder Impedanz Z bezeichnet. Dieser setzt sich aus dem Wirkwiderstand R , der elektrische Energie in Arbeit umsetzt, als Realteil und dem Blindwiderstand X , der zwar elektrische Energie aufnimmt aber diese während einer Periode wieder abgibt, als Imaginärteil zusammen. Der Betrag der Impedanz wird als Scheinwiderstand bezeichnet.

Die Impedanz als komplexe Größe liefert nun verschiedene Möglichkeiten der Interpretation. Die Berechnung der Scheinleistung S mit

$$S = I^*U = I^*(R + iX)I = R|I|^2 + iX|I|^2$$

zeigt, dass nur am Wirkwiderstand R eines Bauteils eine Wirkleistung umgesetzt wird. Die Blindleistung wird nur durch den Blindwiderstand bestimmt. Die Darstellung der komplexen Impedanz als Scheinwiderstand und komplexer Exponentialfunktion lässt auf die Phase von Strom und Spannung schließen. Es gilt

$$Z = |Z| e^{i\phi} = \sqrt{R^2 + X^2} e^{i\phi} \quad \phi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$$

Dabei bestimmt der Scheinwiderstand das Verhältnis der Spannungs- und Stromamplitude und der Phasenwinkel ϕ die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

2.3.2 Die Kapazität

Ein Kondensator im Gleichstromkreis stellt eine Art von Ladungsspeicher dar. Wird an einen Kondensator eine Spannung angelegt, so fließen Ladungen auf den Kondensator. Die Anzahl der Ladungen sind proportional zur angelegten Spannung. Die Proportionalitätskonstante wird als Kapazität C bezeichnet. Ein Kondensator ist also in der Lage elektrische Energie in Form eines Elektrischen Feldes infolge einer Potentialdifferenz zwischen den Polen des Kondensators zu speichern. Die gespeicherte Energie erhält man aus

$$dE = P \cdot dt = U \cdot I \cdot dt = U \cdot \frac{dQ}{dt} \cdot dt = U \cdot C \cdot dU$$

durch Integration. Die in einem Kondensator gespeicherte Energie ergibt sich dann als

$$E = \frac{1}{2}CU^2 \quad (5)$$

Betrachtet man einen Kondensator im Wechselstromkreis, so gilt ausgehend von einem Wechselstrom über dem Kondensator

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dU(t)}{dt} = i\omega CU(t)$$

für die Impedanz des Kondensators

$$Z = \frac{1}{i\omega C}$$

Der Scheinwiderstand als Betrag der Impedanz eines Kondensators ist Frequenzabhängig. Zudem ergibt sich zwischen Spannung und Strom ein Phasenwinkel von $\phi = -\pi/2$, das heisst der Strom eilt der Spannung um eine halbe Phase voraus. Die Kapazität wirkt als reine Blindleistung im Stromkreis.

2.3.3 Die Induktivität

Um einen stromdurchflossenen Leiter bildet sich nach dem Ampereschen Gesetz ein magnetisches Feld. Die Feldstärke wird hierbei durch die Stromstärke bestimmt. Eine Veränderung des Stroms bewirkt also eine Veränderung des magnetischen Feldes um den Leiter. Nach dem Induktionsgesetz wird durch die Veränderung des magnetischen Feldes, genauer durch eine Änderung des Magnetischen Flusses, eine Spannung in den Leiter induziert. Für diese gilt

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

Um den Effekt zu verstärken wird der Leiter häufig in mehreren Leiterschleifen als Spule angeordnet. Die Eigeninduktivität L ist die charakteristische GröÙe zur Beschreibung einer Spule. Sie hängt von der Spulenform, dem Spulenkern und der Windungszahl ab. Das Vorzeichen der induzierten Spannung ist Konventionsabhängig, also von der Richtung des sich ändernden Stroms und der Spannungsmessung abhängig. Wichtig ist hierbei, dass die induzierte Spannung so gerichtet ist, dass sie dem sich ändernden Strom entgegenwirkt. Auch die Spule besitzt die Fähigkeit Energie in Form eines magnetischen Feldes zu speichern. Aus

$$dE = P \cdot dt = U \cdot I \cdot dt = L \cdot I \cdot dI$$

folgt wie oben durch Integration

$$E = \frac{1}{2} LI^2 \tag{6}$$

Die Betrachtung eines periodischen Wechselstrom an der Spule führt auf die Spannung an der Spule

$$U(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = i\omega LI(t)$$

und zur Impedanz Z der Spule

$$Z = i\omega L$$

Auch der Scheinwiderstand der Spule ist frequenzabhängig. Wie auch beim Kondensator bewirkt die Spule eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom von $\phi = \pi/2$. Hier eilt die Spannung dem Strom um eine halbe Phase voraus.

Oft werden reale Spulen aufgrund des endlichen ohmschen Widerstandes in einer Schaltung als Reihenschaltung einer ideal leitenden Spule und eines ohmschen Widerstandes angesehen.

2.3.4 Die Kirchhoffschen Regeln

Zur Berechnung von Spannungen und Strömen in elektrischen Bauteilen können die Kirchhoffschen Regeln herangezogen werden. Diese lassen sich aus den Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik ableiten.

Die Knotenregel besagt, dass in einem elektrischen Knoten (oder einem beliebigen Punkt im Netzwerk) die Summe aller gerichteten Ströme verschwinden muss, wenn der Knoten elektrisch neutral bleibt. In Formeln

$$\sum_{k=1}^n I_n(t) = 0 \quad (7)$$

Aufgrund der Forderung der elektrischen Neutralität der Knoten gilt diese Regel beispielsweise nicht für einen einzelnen Pol des Kondensators.

Die Maschenregel stellt eine Bedingung für die Spannungen in einer Schaltung dar. Sie besagt dass die Summe aller Spannungsabfälle über einen geschlossenen Weg im Netzwerk, also eine Masche, ebenfalls verschwinden muss.

$$\sum_{k=1}^n U_n(t) = 0 \quad (8)$$

Die Kirchhoffschen Regeln gelten auch für die Berechnung von Wechselströmen und Spannungen unter Beachtung der Phase.

2.4 Elektrische Schwingungen

Nachdem die verschiedenen Bauteile vorgestellt wurden, so soll im Folgenden das Verhalten einer Reihenschaltung aus Induktivität, Kapazität und Widerstand in unterschiedlichen Situationen genauer betrachtet werden.

2.4.1 Der Schwingkreis

Der Schwingkreis ist eine Schaltung aus einem Kondensator, der über eine Induktivität entladen wird. Es entstehen elektrische Schwingungen, also Schwingungen von Spannung und Strom am Kondensator.

Qualitativ lässt sich die Ursache dieser elektrischen Schwingungen mit der Energieerhaltung erklären. Die Energie des geladenen Kondensators bewirkt einen Stromfluss durch die Induktivität, die die Energie des Stroms in Form eines magnetischen Feldes speichert und nach der kompletten Entladung des Kondensators wieder abgibt und so den Kondensator mit gegensätzlicher Polarität wieder auflädt.

In Analogie zu einem mechanischen Resonator könnte die Feldenergie der Kapazität als potentielle, die Feldenergie der Spule mit der kinetischen Energie von Ladungen verglichen werden.

Aufgrund des endlichen Innenwiderstands von Bauteilen und Leitungen, aber auch zur Strombegrenzung im Fall einer periodischen Anregung von außen wird oft ein ohmscher Widerstand zum Schwingkreis hinzugeführt. Dies führt zu einer gedämpften Schwingung.

2.4.2 Die Schwingungsgleichung

Zur Herleitung der Schwingungsgleichung für die elektrischen Schwingungen des Schwingkreises betrachtet man hier die Ladung auf dem Kondensator, da sich aus dieser sowohl die Spannung über dem Kondensator als auch die Stromstärke berechnen lässt.

Aus der Maschenregel folgt für die Summe der Spannungsabfälle über dem Kondensator U_C , über der Induktivität U_L und über dem ohmschen Widerstand U_R :

$$U_L + U_R + U_C = 0$$

Die Spannung am Kondensator ist proportional zur Ladung auf dem Kondensator.

$$U_C = \frac{1}{C}Q$$

Der Spannungsabfall über dem Widerstand hängt vom Strom und somit von der zeitlichen Änderung der Ladung ab.

$$U_R = R \cdot I = R\dot{Q}$$

Analog ergibt sich der Spannungsabfall an der Spule durch die zeitliche Änderung des Stroms und somit aus der zweiten zeitlichen Ableitung der Ladung.

$$U_L = L \cdot \dot{I} = L \cdot \ddot{Q}$$

Eingesetzt in die Gleichung für die Spannungen im Stromkreis und durch die Induktivität geteilt, erhält man die homogene Schwingungsgleichung

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \quad (9)$$

Diese Gleichung entspricht der Schwingungsgleichung eines linear gedämpften harmonischen Oszillators.

2.4.3 Freie Schwingungen

In Analogie zu den bereits bekannten linear gedämpften harmonischen Oszillatoren definiert man die Grundfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 und die Dämpfungskonstante β in diesem Fall durch

$$\omega_0^2 := \frac{1}{LC} \quad \beta = \frac{R}{2L} \quad (10)$$

Mit Hilfe des Ansatzes zur Lösung der Differentialgleichung von

$$Q = A \cdot e^{\lambda t} \quad (11)$$

kann durch Einsetzen in die Schwingungsgleichung der unbekannte Koeffizient λ bestimmt werden. Es ist

$$\lambda = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (12)$$

Je nach dem Wert der Dämpfungskonstante β und der Grundfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 müssen nun drei unterschiedliche Fälle unterschieden werden.

Der Schwingfall Ist die Dämpfung kleiner als die Eigenfrequenz des Oszillators, so erhält der Koeffizient der Exponentialfunktion λ sowohl einen Realteil als auch einen Imaginärteil. Es gilt dann

$$\lambda = -\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Der oben gemachte Ansatz lautet dann

$$Q = A \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}$$

wobei das System noch schwingfähig ist. Deshalb definiert man die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung als

$$\omega_g = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (13)$$

Die Lösung der Schwingungsgleichung für eine $\beta < \omega_0$ liefert also eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_g , deren Amplitude mit β exponentiell abnimmt. Für $\beta = 0$ folgt der Fall einer ungedämpften Schwingung.

Aus der Schwingungsgleichung für die Ladung auf dem Kondensator folgt nun für die Spannung am Kondensator:

$$U = \underbrace{\frac{Q_0}{C}}_{=U_0} \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}$$

Der Strom über dem Kondensator ergibt sich durch Differenzieren der Ladungsgleichung zu

$$I = U_0 \cdot \left(i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} - \beta \right) \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}$$

Man definiert alternativ zur Dämpfung das logarithmische Dekrement Λ als den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Amplituden. Mit der Periodendauer von $T = 2\pi/\omega_g$ gilt:

$$\Lambda = \ln \left(\frac{Q(t)}{Q(t+T)} \right) = \ln \left(\frac{A \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{i\omega t}}{A \cdot e^{-\beta(t+T)} \cdot e^{i\omega(t+T)}} \right) = \beta \cdot T = \beta \frac{2\pi}{\omega_g} \quad (14)$$

Der Aperiodische Grenzfall Der aperiodische Grenzfall tritt dann auf, wenn die Dämpfungskonstante genau der Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung entspricht. Betrachtet man den Koeffizienten der Exponentialfunktion λ für $\beta = \omega$, so fällt auf, dass dieser keinen Imaginäranteil aufweist und so kein schwingfähiges System mehr darstellt. Ob die Ladung und damit die Spannung vor dem Erliegen der Ströme noch einen Nulldurchgang aufweist, hängt von den Anfangsbedingungen ab. Für die Ladung auf dem Kondensator ergibt sich eine exponentielle Entladung:

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\beta t}$$

Der aperiodische Grenzfall nimmt als Übergang von einem periodisch schwingfähigen System zu einem stark gedämpften System, in dem keine Schwingung mehr möglich ist, eine Sonderstellung ein. Je nach Anfangsbedingungen kann hier die Ladungsfunktion Q vor dem zur Ruhe kommen noch einen Nulldurchgang aufweisen. Für viele technische Anwendungen ist der aperiodische Grenzfall von Bedeutung, da hier das Abklingen der Auslenkung im Vergleich zu den anderen Fällen sehr rasch geschieht.

Der Kriechfall Der Kriechfall tritt auf, wenn die Dämpfung größer als die Eigenfrequenz des Resonators ist. Hierbei ist das System nicht mehr schwingfähig. Man erhält zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung, die auf den Ansatz

$$Q = A \cdot e^{-\beta t + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + B \cdot e^{-\beta t - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}$$

führen.

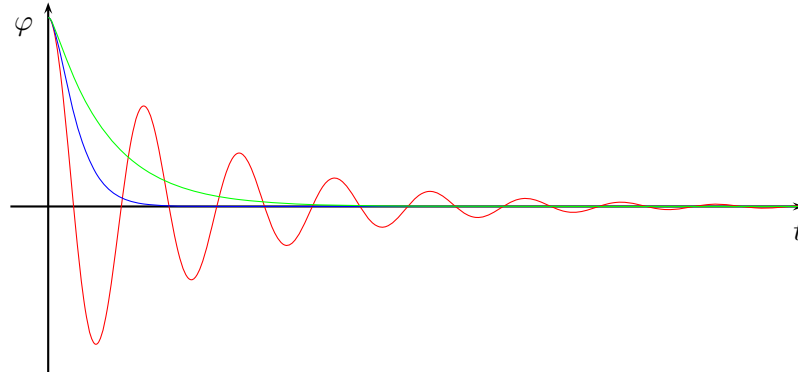


Abbildung 1: Vergleich der verschiedenen Schwingungsformen bei unterschiedlicher Dämpfung eines Systems. Beim Schwingfall (rot) ist die Dämpfung deutlich geringer als die Eigenfrequenz des Resonators. Bei größerer Dämpfung, also dem Kriechfall (grün), geht die Auslenkung gegen Null. Die Ruhelage wird beim aperiodischen Grenzfall (blau) am schnellsten erreicht.

2.4.4 Erzwungene Schwingungen

Bei einer erzwungenen Schwingung wirkt auf das System von außen eine zusätzliche Spannung. Die Schwingungsgleichung ist in diesem Fall durch die Gleichung

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \frac{U_{err}(t)}{L}$$

gegeben, wobei die Erregerspannung periodisch auf das System wirkt.

$$U_{err} = \hat{U}_{err} \cdot e^{i\omega t}$$

Hierbei stellt ω die Kreisfrequenz, sowie \hat{U}_{err} die Amplitude der anregenden Spannung dar. Mit einer Anregung von außen wird die Schwingungsgleichung zu einer inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei die Lösung des dazugehörigen homogenen Systems bereits bekannt ist. Ein allgemeiner Ansatz für die partikuläre Lösung

$$Q_p = E \cdot e^{\kappa t}$$

liefert eingesetzt

$$\kappa^2 \cdot E e^{\kappa t} + 2\beta \cdot \kappa \cdot E \cdot e^{\kappa t} + \omega_0^2 \cdot E \cdot e^{\kappa t} = \frac{\hat{U}_{err}}{L} e^{i\omega t}$$

Setzt man $\kappa = i\omega$ lässt sich hiermit auch der komplexe Koeffizient E berechnen. Es ist

$$E = \frac{\hat{U}_{err}/L}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}$$

Schreibt man den Koeffizienten C in der Exponentialdarstellung einer komplexen Zahl

$$E = F \cdot e^{i\phi}$$

so ergibt sich für das Modul F und damit die Amplitude der Schwingung

$$F = |E| = \frac{\hat{U}_{err}/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (15)$$

und für die Phase von E und damit die Phasendifferenz zwischen Erreger und Oszillator für

$$\phi = \arctan \left\{ \frac{\Im(E)}{\Re(C)} \right\} = \arctan \left\{ -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\} \quad (16)$$

Nach dem Abklingen des homogenen Anteils der Ladungsschwingung am Kondensator wird die Ladung am Kondensator also durch die Funktion

$$Q_p(t) = \frac{\hat{U}_{err}/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} e^{i(\omega t + \phi)}$$

beschrieben. Hieraus erhalten wir die Spannung über dem Kondensator durch

$$U(t) = \hat{U}_{err} \underbrace{\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}_{:=\hat{U}_C} e^{i(\omega t + \phi)}$$

Den Strom am Kondensator erhalten wir aus der zeitlichen Ladungsänderung:

$$I(t) = \dot{Q}_p(t) = \frac{\hat{U}_{err}}{L} \underbrace{\frac{i\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}_{:=\hat{I}_c} e^{i(\omega t + \phi)}$$

Sowohl die maximale Amplitude der Spannung als auch die Amplitude des Stroms hängen hier von der Erregerfrequenz ab. Die maximale Amplitude der Spannung am Kondensator ergibt sich durch die Extremwertbetrachtung von $\hat{U}_{err}(\omega)$ durch

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\omega} \hat{U}_C = \hat{U}_{err} \frac{2\omega_0^2\omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}^3}$$

Die Spannungsamplitude am Kondensator wird demnach maximal für die erregende Frequenz

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

Hierbei wurde die Lösung $\omega = 0$ als physikalisch nicht sinnvolle Lösung nicht betrachtet. Analog ergibt sich das Maximum der Amplitude des Stroms am Kondensator aus

$$0 = \frac{d}{d\omega} \hat{I}_C = \frac{\hat{U}_{err}}{L} \frac{i(\omega_0^4 - \omega^4)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}^3}$$

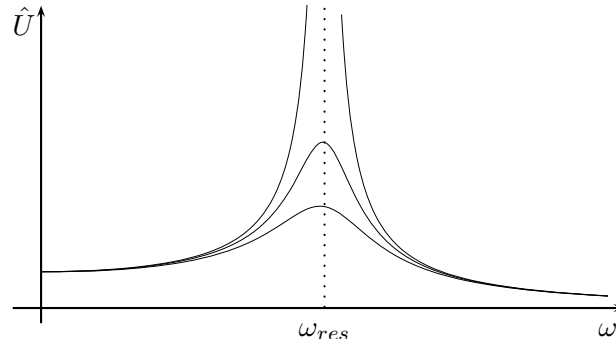


Abbildung 2: Die Spannungsamplitude \hat{U} einer erzwungenen Schwingung für verschiedene Dämpfungen β in Abhängigkeit der erregenden Frequenz ω . Hier entspricht $\omega_{res} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$

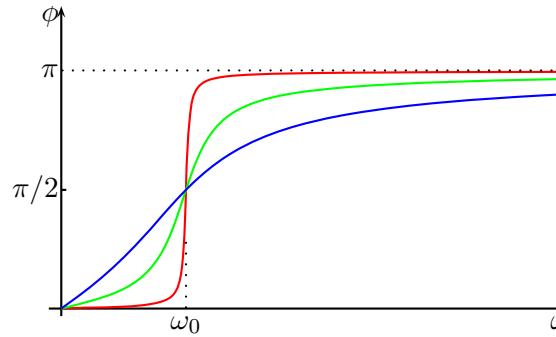


Abbildung 3: Die Phasendifferenz ϕ zwischen erregender und gemessener Spannung einer erzwungenen Schwingung für verschiedene Dämpfungen β in Abhängigkeit der erregenden Frequenz ω . Dabei entsteht die rote Kurve durch die kleinste Dämpfung.

für die erregende Kreisfrequenz

$$\omega = \omega_0$$

Die Spannungsresonanzfrequenz im Schwingkreis, also die Frequenz bei der die Spannung maximal wird, liegt unterhalb der Stromresonanzfrequenz. Ein analoges Ergebnis erhält man für die Betrachtung der maximalen Auslenkung bzw der maximalen Geschwindigkeit einer erzwungenen mechanischen Schwingung.

Die Schaubilder aus (2) und (3) zeigen exemplarisch die Spannungsamplitude von erzwungenen Schwingungen bzw. die Phasenverschiebung zwischen erregender und gemessener Spannung in Abhängigkeit der erregenden Frequenz für verschiedenen Dämpfungen.

3 Versuch und Auswertung

Im Versuch werden im Wesentlichen zwei Arten von Messungen an drei verschiedenen Schwingkreisen vorgenommen. Der Versuch gliedert sich daher in drei Teile. Im ersten und zweiten Versuchsteil werden hierzu die freien gedämpften Schwingungen zweier Schwing-

C in μC	L in H	T in s	k	f in Hz	β in $1/s$	R in Ω
40	630	1	2,08	1	0,74	926
20	630	0.69	2,05	1,45	1,04	1307
20	315	0.35	2,18	2,86	2,23	1404

Tabelle 1: *Gemessene und errechnete Werte für die Untersuchung der langsamen ange-
stoßenen Schwingung des Schwingkreises.*

kreise untersucht. Die Messungen des letzten Versuchteils sind Messungen an erzwungenen Schwingung.

3.1 Langsame gedämpfte Schwingungen

Durch die Verwendung von Bauteilen mit relativ hoher Kapazität und Selbstinduktivität ist eine Aufzeichnung der elektrischen Schwingungen mittels eines yt-Schreibers möglich, da hier die Eigenfrequenz des Schwingkreises relativ gering ist.

Zur Aufzeichnung der langsamen elektrischen Schwingungen wurde ein Kondensator mit Hilfe einer Gleichspannungsquelle aufgeladen. Schaltbar konnte der Kondensator über eine Spule mit nicht zu vernachlässigendem Innenwiderstand entladen werden. Der Spannungsabfall über dem Kondensator wurde Mittels yt-Schreiber aufgezeichnet.

Es wurden drei verschiedene Schwingung für Kombinationen von Induktivität und Kapazität aufgezeichnet. Der Innenwiderstand der Spule zuzüglich dem Widerstand der verwendeten Schaltung ist nicht exakt bekannt und soll aus den Messungen errechnet werden. Anhand der aufgezeichneten Spannungsverläufe am Kondensator werden nun für die drei unterschiedlichen Kombinationen jeweils die Periodendauer T und das Dämpfungsverhältnis k bestimmt. Aus diesen wird zum einen die Frequenz f als Reziprokwert der Periodendauer und die Dämpfungskonstante aus

$$\ln(k) = \Lambda = \beta T \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\ln(k)}{T}$$

berechnet. Aus der Dämpfungskonstante lässt sich mit Hilfe der Definition $\beta = R/2L$ der Gesamt-widerstand des Schwingkreises berechnen. Dieser setzt sich aus den Widerständen der Leiter und dem Innenwiderstand der Spule zusammen, wobei der Innenwiderstand den dominanten Widerstand darstellt. Tabelle (1) stellt die gemessenen und die daraus errechneten Werte dar.

Die aufgezeichneten Schwingungen lieferten bei der Auswertung relativ gute Ergebnisse im Bezug auf die Frequenzmessung. Nur im letzten Fall lieferte die Berechnung der Frequenz aus der genutzten Induktivität und Kapazität einen abweichenden Wert von $f = 2.0Hz$. Eine mögliche Erklärung liefert hier die genutzte Spule. Eine Halbierung der Windungszahl durch die Nutzung des Mittelanschlusses halbiert theoretisch zwar die Induktivität ist aber praktisch gesehen ungenau, da die andere Hälfte des Drahtes immer noch mit dem Schwingkreis in Verbindung steht. Durch Resonanzeffekte in diesem Leiterstück ist die Abweichung am wahrscheinlichsten zu erklären.

Eine große Ungenauigkeit lässt sich zwischen dem angegebenen Innenwiderstand des Systems und dem errechneten Widerstand feststellen. Der Innenwiderstand der Spule mit $R \approx 280\Omega$ kann nicht alleine für dieses Messergebnis verantwortlich sein. Ein erhöhter Widerstand durch defekte Kabel und nicht ideal leitende Kabelverbindungen lässt sich hier für die

wahrscheinlichste Ursache des stark erhöhten Widerstands der Versuchsanordnung nennen. Hierfür spricht auch, dass nach der Messung mit der höheren Kapazität (diese wurde durch die Parallelschaltung zweier Kondensatoren realisiert) die Versuchsanordnung umgesteckt wurde und die beiden folgenden Messungen einen ähnlichen Widerstandswert liefern.

3.2 Schnelle gedämpfte Schwingungen

Die Auswertung für Bauteile mit kleinerer Induktivität und Kapazität ist aufgrund der höheren Frequenz der auftretenden Schwingung nur am Oszilloskop möglich.

Ach in diesem Versuchsteil wurde die Spannung über der Kapazität im Schwingkreis vorgenommen. Die Anregung des Schwingkreises erfolgte hier durch einen Rechtecksgenerator dessen Signal auch zur Triggerung des Oszilloskops genutzt wurde. Während der eine Pol der Kapazität und somit auch der Spule auf dem festen Erdpotential gehalten wurde wurde der rechteckige Spannungsverlauf des Funktionsgenerators zum Anstoßen der Schwingung genutzt. Ein hochohmiger Vorwiderstand begrenzt hierbei den durch die Spule und regelbaren Widerstand des Schwingkreises fließenden Strom.

Für den Versuch wurde ein Kondensator mit der Kapazität $C =$, sowie eine Spule mit der Eigeninduktivität $L =$ genutzt. Für verschiedene Werte des regelbaren Widerstands wurde nun die Periodendauer T , sowie das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden k bestimmt. Hieraus soll nun aus der Periodendauer T die unbekannte Eigeninduktivität der Spule ermittelt werden. Hier gilt

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}$$

Dies ist allerdings nur eine Näherung zur Berechnung der Eigeninduktivität der Spule da zur korrekten Berechnung auch der Gesamtwiderstand des Systems, also die Dämpfung bekannt sein muss. Nach der Berechnung der Dämpfungskonstante aus dem Dämpfungsverhältnis k und der Periodendauer durch

$$\beta = \frac{\ln(k)}{T}$$

ist die Eigeninduktivität der Spule exakter zu berechnen durch

$$L = \frac{T^2}{C\sqrt{\beta^2 T^2 + 4\pi^2}} = \frac{T^2}{C\sqrt{\ln(k)^2 + 4\pi^2}}$$

Mit der Definition des Dämpfungsverhältnisses β kann nun auf den Gesamtwiderstand des Systems geschlossen werden. Es gilt

$$R = 2\beta L = \frac{2\ln(k)}{T} = \frac{T \ln(k)}{2C\sqrt{\ln(k)^2 + 2\pi^2}}$$

Die obigen Formeln sind die Grundlage für die Berechnung der Werte aus Tabelle (2). Ein Blick auf die errechneten Werte zeigt, dass die Induktivität der Spule aus der Schwingungsdauer relativ genau bestimmt werden konnte. Als Mittelwert ergibt sich die Induktivität zu

$$L = 9.88mH$$

R in Ω	T in μs	k	L in mH	β in $1/s$	R_s in Ω
20	64	1,08	10.37	1203	23,8
200	64	3,75	9.94	20652	408,4
400	64	8	9.35	32491	642,5

Tabelle 2: *Gemessene und errechnete Werte für die Untersuchung der schnellen angestoßenen Schwingung des Schwingkreises.*

Dieser Wert entspricht nahezu dem angegebenen Wert von $L = 9.64mH$. Schlechtere Ergebnisse lieferte die Berechnung des Gesamtwiderstand im System. Während bei der ersten Messung der Gesamtwiderstand, zusammengesetzt aus dem im Schwingkreis befindlichen einstellbaren Widerstand und Widerstand der Zuleitungen, plausibel erscheint, wurde bei den letzten Durchgängen ein zu hoher Wert gemessen. Dabei fällt auf, dass der Gesamtwiderstand jeweils ungefähr 200Ω vom eingestellten Wert abweicht. Da ein so hoher Widerstand der Zuleitungen und Steckverbindungen nach der ersten Messung ausgeschlossen werden kann, liegt die Vermutung nahe, dass der verwendete einstellbare Widerstand im verwendeten Bereich nicht dem eingestelltem Wert entspricht.

3.3 Erzwungene Schwingungen

Die erzwungenen Schwingungen wurden mit einer ähnlichen Schaltung realisiert, wie die Messungen im vorherigen Versuchsteil. Dabei wurde mit dem Oszilloskop der Spannungsverlauf über dem Kondensator gemessen. Der anregende Wechselstrom wurde hier induktiv an den Schwingkreis angekoppelt. Die induktive Ankopplung bietet gegenüber der direkten Einspeisung den Vorteil, dass nur das Resonanzverhalten des Schwingkreises untersucht werden kann und keine weiteren Signale durch Rückkopplung am Funktionsgenerator auftreten. Aus gleichem Grund sollte die Eigeninduktivität der verwendeten Induktivität viel größer sein als die Induktivität der Ankopplung. Dies verhindert eine unerwünschte Kopplung des Schwingkreises an den Generatorkreis.

Mit Hilfe des Oszilloskops kann die Spannungsamplitude am Kondensator und die Phase zwischen erregendem und resultierendem Spannungsverlauf bestimmt werden. Diese Messung wurde für jeweils drei unterschiedliche Dämpfungen, realisiert durch einen schaltbaren Widerstand, bei zehn unterschiedlichen Frequenzen f der erregenden Spannung vorgenommen. Die gemessenen Werte sind dem Meßprotokoll zu entnehmen. Das Schaubild aus (4) stellt die gemessenen Spannungsamplituden graphisch dar. Die Phase zwischen der erregenden und resultierenden Spannung in Abhängigkeit der erregenden Frequenz ist in Abbildung (5) dargestellt.

3.4 Fehlerdiskussion

Eine Fehlerrechnung scheint in diesem Versuch nicht sinnvoll, da für eine statistische Auswertung eine zu geringe Anzahl von Messwerten erhoben wurde. Dennoch kann versucht werden Fehlerquellen zu benennen und Messwerte aus Plausibilitätsgründen zu bewerten. Bei der Messung der langsamen angestoßenen Schwingung eines Schwingkreises war die Bestimmung der Frequenz relativ exakt möglich. Die Messungen deckten sich auch mit den aus der Theorie errechneten Werten. Lediglich in der Messung, in der nur die Hälfte der Spule genutzt wurde ist das Ergebnis abweichend zum theoretisch Errechneten. Eine

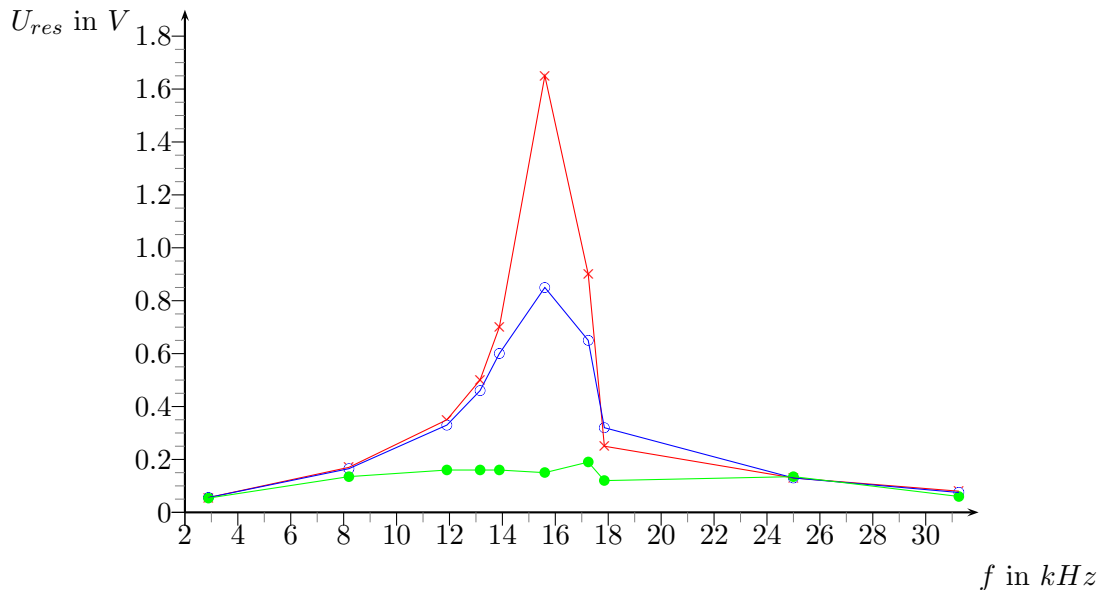


Abbildung 4: Die Amplitude U der erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit der erregenden Frequenz für unterschiedliche Dämpfungen. Die Dämpfung wurde durch die Widerstände $R = 10\Omega$ (rot), $R = 100\Omega$ (blau) und $R = 1000\Omega$ (grün) realisiert.

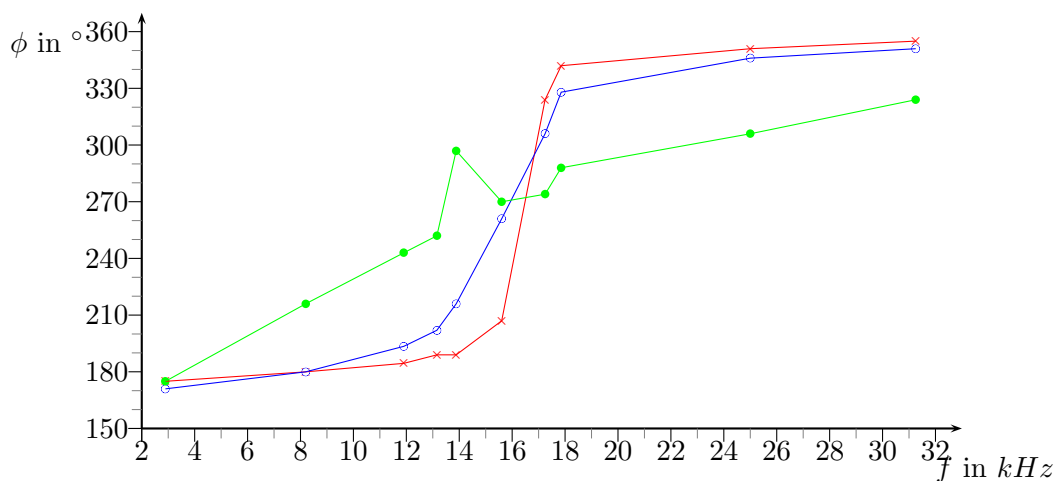


Abbildung 5: Die Phase ϕ der erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit der erregenden Frequenz für unterschiedliche Dämpfungen. Die Dämpfung wurde durch die Widerstände $R = 10\Omega$ (rot), $R = 100\Omega$ (blau) und $R = 1000\Omega$ (grün) realisiert.

große Differenz zum erwarteten Wert ergab die Bestimmung des Widerstand im System. Die eventuellen Gründe hierfür wurden bereits genannt.

Bei den Messungen an den schnellen Schwingungen des Schwingkreises entsprechen die gemessenen Werte ebenfalls der erwarteten Größe. Dies lässt sich aus der relativ exakten Bestimmung der Induktivität erkennen. Die Widerstandbestimmung für das Gesamtsystem lieferte auch hier stark von der Erwartung abweichende Werte. Dies wurde allerdings schon erwähnt.

Die Messungen der erzwungenen Schwingungen des Schwingkreises sind als verlässlich zu

bewerten. Sowohl der Verlauf der Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz als auch die Phase weisen qualitativ den erwarteten Verlauf auf. In einzelnen Fällen müsste die erneute Messung oder Verwerfung der gemessenen Werte in Betracht gezogen werden. Der charakteristische Verlauf für die Amplitude und die Phase der erzwungenen Schwingung ließ sich aber, besonders im Fall geringer Dämpfung, sehr gut erfassen.

4 Fragen

Die Beantwortung der in der Versuchsanleitung gestellten Fragen

- a) Ist die Messgenauigkeit des Oszilloskops ausreichend um die Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Dämpfung zu bestimmen?
Die theoretisch errechnete Differenz zwischen den Periodendauern ohne und mit Berücksichtigung der Dämpfung liegt für die kleinste verwendete Dämpfung im Bereich von einigen Nanosekunden. Für die höchste Dämpfung entspricht $\Delta T \approx 1.2\mu s$. Die Messungen wurden mit einer Skalierung von $20\frac{\mu s}{div}$ vorgenommen, so dass der Zeitunterschied in der Periode nur schwer feststellbar wäre. Theoretisch könnte diese Differenz mit dem Oszilloskop aufgelöst werden, dann wäre aber eine exakte Bestimmung der Periodendauer nicht mehr möglich.
- b) Spannungsresonanz
siehe 2.4.4
- c) Stromresonanz
siehe 2.4.4
- d) Warum muss die gegenseitige Induktivität bei der induktiven Ankopplung gering gegenüber der Selbstinduktivität der Spule sein?
siehe 3.3

5 Verzeichnisse

5.1 Literaturverzeichnis

- [1] B. Runge *Schwingkreis: Versuchsanleitung*
- [Dem04] W.DEMTRÖDER *Experimentalphysik 2 - Elektrizität und Optik* Springer-Verlag 3.Auflage 2004
- [2] Verschiedene *Wikipedia - Die freie Enzyklopädie* <http://de.wikipedia.org>
- [APPol] A.HASENKAMPF,T.LORENZ *Protokoll zum Pohlschen Rad*