

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Physikalische Grundlagen	2
2.1	Die Wellengleichung	2
2.2	Lösungen der Wellengleichung	4
2.3	Messmethoden an der Saite	9
2.3.1	Optische Messung	9
2.3.2	Schwingungsmessung	10
2.3.3	Digitale Spektralanalyse	10
3	Versuch und Auswertung	13
3.1	Messungen	13
3.2	Auswertung	14
3.2.1	Frequenz vs. Masse	14
3.2.2	Frequenz vs. Saitenlänge	15
3.3	Fehlerdiskussion	16
4	Fragen	16
5	Verzeichnisse	17
5.1	Literaturverzeichnis	17
Anhang A: Messprotokoll aus dem Praktikum		

1 Einleitung

Die physikalische Betrachtung eines alltäglichen Phänomens, der Entstehung von Schallwellen durch die Saite eines Musikinstruments führt auf eine wichtige physikalische Gleichung, die Wellengleichung. Viele in der Natur zu beobachtenden Systeme, Systeme in denen räumlich und zeitlich periodisch variierende Größen eine Rolle spielen, lassen sich durch Lösungen der Wellengleichung mit verschiedenen Rand- oder Anfangsbedingungen mathematisch beschreiben. Hier soll der einfache Fall einer eindimensionalen, stehenden Welle einer schwingenden Saite untersucht werden.

2 Physikalische Grundlagen

Im Folgenden sollen die für das Verständnis des Versuchs wichtigen physikalischen Grundlagen genannt und erläutert werden.

2.1 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung für eindimensionale Wellen, wie zum Beispiel Seilwellen ist das mathematische Hilfsmittel zur Beschreibung der Schwingungsvorgänge an der schwingenden Saite. Auf eine Herleitung mit den Hilfsmitteln der Newtonschen Mechanik soll an dieser Stelle zugunsten einer Herleitung der Wellengleichung mit Hilfe der analytischen Mechanik verzichtet werden.

Die Euler-Ostrogradskij-Gleichung Ein Hilfsmittel der Variationsrechnung, die Euler-Ostrogradskij-Gleichung muss für die Herleitung noch bewiesen werden. Hierzu betrachten wir eine Funktion $u(t, x)$ und das folgende Funktional, welches es zu minimieren gilt:

$$F(u) = \int_G L(t, x, u, \dot{u}, u') \quad G \subset \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

Hierbei seien, wie auch im Folgenden die Kurzschreibweisen der Differentiale gegeben durch

$$\dot{u}(t, x) := \frac{\partial}{\partial t} u \quad u'(t) = \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \quad (2)$$

Die Integrierbarkeit der Funktion L vorausgesetzt, ergibt sich mit einem Vektor $k := (t, x)$ folgende Situation:

$$F(u) = \int_G L(h, u, \frac{d}{dk} u) \quad (3)$$

Nach dem Variationsprinzip wird dieses Funktional minimal, wenn L die Euler-Gleichung erfüllt. Es gilt für L :

$$\frac{\partial}{\partial u} L - \frac{d}{dk} \frac{\partial}{\partial (\nabla u)} L = 0 \quad (4)$$

Mit der geeigneten Auswertung des Ausdrucks, speziell des zweiten Terms, ergibt sich die Euler-Ostrogradskij-Gleichung.

$$\frac{\partial}{\partial u} L - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{u}} L - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u'} L = 0 \quad (5)$$

Das Funktional aus Gleichung (1) wird minimiert, wenn die Lagrangefunktion L die obige Gleichung erfüllt.

Energetische Betrachtung einer Saite Betrachtet man nun, den etwas idealisierten Fall einer dünnen Saite, die mit einer Kraft F gespannt wird. Die Dichte ρ der Saite sei homogen. Die Seilspannung τ ergibt sich dann aus dem Quotienten der Spannkraft F und der Saitenquerschnittsfläche dA . Die Auslenkung der Saite sei in eine Richtung senkrecht zum Verlaufe des Seils, so dass die Position der Saite zum Zeitpunkt t an Stelle x durch die Funktion $y(x, t)$ gegeben ist.

Die kinetische Energie T einer Bewegung auf dem Seil (oder eines Stücks) ist nun durch den Ausdruck

$$T = \int \frac{1}{2} dm \dot{y}^2 = \int dl \frac{1}{2} \rho dA \dot{y}^2 \quad (6)$$

gegeben. Diese ergibt sich aus der Bewegungsenergie eines kleinen Masselements, aus der Beziehung $dm = \rho(dl \cdot dA)$

Die potentielle Energie U einer Saite ergibt sich aus der Arbeit, die gegen die Seilspannung verrichtet werden muss, um die Saite durch das Auslenken um dy von einer Teilstücklänge dx auf die Länge ds zu verlängern. Es ist

$$dU = F(ds - dx) = \tau dA(\sqrt{dx^2 + dy^2} - dx) = \tau dA \left(dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - dx \right)$$

Im Falle einer kleinen Auslenkung kann die Wurzel geschickt genähert werden, so dass gilt

$$dU \approx \tau dA \left(dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right) - dx \right) = \frac{1}{2} \tau dA (y')^2$$

Wiederum ergibt sich die potentielle Energie als Integral der Einzelenergien.

$$U = \int dU = \int dl \frac{1}{2} \tau dA y'^2 \quad (7)$$

Die Wellengleichung Betrachten wir nun die Lagrangefunktion des Systems der Saite ergibt sich diese als

$$L(t, y) = T - U = \int dl \frac{1}{2} \rho dA \dot{y}^2 - \int dl \frac{1}{2} \tau dA y'^2$$

Nach dem Hamiltonschen Prinzip ist nun die Funktion y durch ein Extremum des Funktionals

$$H(y) = \int dt L(t, y) = \int dt \left(\int dl \frac{1}{2} \rho dA \dot{y}^2 - \int dl \frac{1}{2} \tau dA y'^2 \right)$$

gegeben. Die Normale Euler-Gleichung versagt hier. Allerdings liefert die Euler-Ostrogradskij-Gleichung eine Bedingung für die Minimierung des Funktionals.

$$H(y) = \int dt \int dl \underbrace{\left(\frac{1}{2} \rho dA \dot{y}^2 - \frac{1}{2} \tau dA y'^2 \right)}_{:=L^*(t, x, y, \dot{y}, y')} \quad (8)$$

Nach Gleichung (5) muss also für $y(x, t)$ gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y} L^* - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} L^* - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} L^* \\ &= 0 - \frac{\partial}{\partial t} \rho dA \dot{y} + \frac{\partial}{\partial x} \tau dA y' \end{aligned} \quad (9)$$

Die Ableitungen ausgeführt ergibt sich daraus mit der Definition von $c^2 := \tau/\rho$ die Wellengleichung

$$\tau y'' = \rho \ddot{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} y = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y \quad (10)$$

2.2 Lösungen der Wellengleichung

Nach der Herleitung der Wellengleichung sind Lösungen der Wellengleichung für die weitere Betrachtung interessant. Für die Wellengleichung können im allgemeinen unendlich viele Lösungen gefunden werden, die aber in unserem Fall durch Rand- und Anfangsbedingungen eingeschränkt werden. Dies bestimmt das Vorgehen der Lösungssuche.

Lösungen nach D'Alembert Sind die Funktionen $f_{\pm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, also $f_{\pm} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ so sind

$$y_1(t, x) = f_+(x - c \cdot t) \quad y_2(t, x) = f_-(x + c \cdot t)$$

sowie jede Linearkombination der beiden Funktionen Lösung der Wellengleichung. Für die Lösung y_1 gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_+(x - ct) = c^2 f_+''(x - ct) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_+(x - ct) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y_1$$

und analog für die zweite Lösung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_-(x + ct) = c^2 f_-''(x + ct) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_-(x + ct) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y_2$$

Dabei entsprechen die Funktionen f_{\pm} zwei Signalen auf der Saite, die sich in entgegengesetzter Richtung auf der Saite ausbreiten. Dabei bewegt sich das Signal, repräsentiert durch y_1 mit fortschreitender Zeit in positive x -Richtung, das Signal y_2 entgegengesetzt in negative x -Richtung auf der Saite. Abbildung (1) verdeutlicht die Wellenausbreitung auf einer Saite ohne Randbedingungen.

Anfangsbedingungen Die nicht näher spezifizierten Funktionen f_{\pm} können durch die Einbeziehung von Anfangsbedingungen spezifiziert werden. Da es sich bei der Wellengleichung um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, sind zwei Anfangsbedingungen notwendig. Ist die Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ und die Geschwindigkeit der Saite bekannt, kann die Wellengleichung gelöst werden. Ist

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \dot{y}(x, 0) = \dot{y}_0(x) \quad (11)$$

so gilt für die Funktionen f_{\pm}

$$y(x, 0) = y_0(x) = f_+(x) + f_-(x) \quad (12)$$

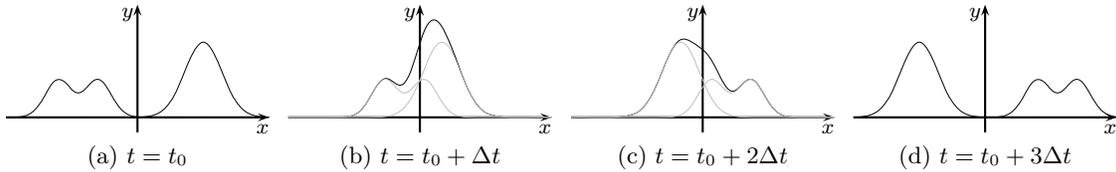


Abbildung 1: *Graphische Veranschaulichung einer Lösung nach D'Alembert. Zwei Signale breiten sich mit fortschreitender Zeit in entgegengesetzter Richtung auf der Saite aus. Dabei entspricht das Signal mit nur einem Maximum der Funktion f_- . Zu den Zeiten aus (1b) und (1c) ist die Auslenkung durch die Superposition beider Funktionen f_{\pm} bedingt.*

die partielle Ableitung von y nach der Zeit liefert die Geschwindigkeit der Saite

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(x) &= \dot{y}(x, 0) = \left. \frac{\partial}{\partial t} f_+(x - ct) + f_-(x + ct) \right|_{t=0} \\ &= -cf'_+(x) + cf'_-(x) \end{aligned} \quad (13)$$

Die Integration von \dot{y}_0 liefert dann mit der Anfangsbedingung aus (12) die Lösung der Wellengleichung. Es ist

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \left[y_0(x + ct) + y_0(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \dot{y}_0(s) ds \right] \quad (14)$$

Im einfachen Fall von $\dot{y}_0 = 0$ erhält man so zwei identische Signale von der Form von der Anfangsbedingung y_0 , die sich auf der Saite in entgegengesetzter Richtung ausbreiten. Hier müssten noch die Randbedingungen einer endlichen an den Randpunkten fixierten Saite eingearbeitet werden.

Periodische Wellen Eine spezielle Lösung der Wellengleichung ist durch die periodischen Wellen gegeben. Diese entstehen durch spezielle Randbedingungen, wie einer periodisch ausgelenkten Saite. Diese Randbedingung kann durch

$$y(0, t) = A \cdot e^{i\omega t}$$

modelliert werden. Betrachtet man nun die im Intervall $[0, \infty)$ propagandierende Welle, so ist diese durch eine periodische Welle gegeben. Der Ansatz $y(x, t) = f_+(x - ct)$ nach D'Alembert löst die Wellengleichung. Die Randbedingung liefert hier

$$f_+(-ct) = A \cdot e^{i\omega t}$$

als zweimal stetig differenzierbare Funktion. Die Wellengleichung für $x > 0$ ist also durch

$$y(x, t) = f_+(x - ct) = A \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}(x-ct)} \quad (15)$$

gegeben. Definiert man eine zusätzliche Größe $k = \frac{\omega}{c}$ so ergibt sich

$$y(x, t) = A \cdot e^{-i(kx - \omega t)} \quad (16)$$

Diese Lösung der Wellengleichung bzw. die entstehende Welle wird als ebene, monochromatische Welle bezeichnet. Alle für eine ebene Welle charakteristischen Größen können

hier untersucht werden.

Die eingeführte Größe k wird als Wellenvektor bzw. Wellenzahl bezeichnet. Der Wellenvektor zeigt immer in Propagationsrichtung der Welle, was in diesem Fall relativ unspektakulär ist, da hier die nur eine eindimensionale Welle betrachtet wird. Wellenvektor und Wellenzahl (im mehrdimensionalen Fall der Betrag des Wellenvektors) sind identisch.

Die Frequenz einer Welle f oder besser die Kreisfrequenz ω einer Welle entspricht hier der Kreisfrequenz der erregenden Schwingung. Sie gibt die Frequenz der Schwingung der Welle in einem festen Punkt der Welle an. Die Frequenz einer Welle kann (durch Dämpfungen der Welle) von der Ausbreitungsrichtung und damit von der Wellenzahl k abhängen. Diese Gegebenheit wird als Dispersion bezeichnet und durch die Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$ ausgedrückt.

Der Imaginärteil des Arguments der Exponentialfunktion wird als Phase $\varphi = kx - \omega t$ bezeichnet. Die Phase der Welle hängt vom Wellenvektor und der Kreisfrequenz der Welle ab. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Phase wird als Phasengeschwindigkeit v_{Ph} bezeichnet und ergibt sich aus dem Quotienten aus (Kreis-)Frequenz und Wellenzahl der Welle.

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega} c = c$$

Die Phasengeschwindigkeit kann mit der Größe c aus der Wellengleichung identifiziert werden. Aufgrund der Dispersion kann die Phasengeschwindigkeit für unterschiedliche Kreisfrequenzen variieren.

Aufgrund der Dispersion ist die Einführung einer anderen Größe, die ebenfalls eine Ausbreitungsgeschwindigkeit angibt, möglich. Die als Gruppengeschwindigkeit v_G bezeichnete Größe ist definiert durch

$$v_G = \frac{\partial}{\partial k} \omega(k)$$

Anschaulich kann die Phasengeschwindigkeit als Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle mit einer bestimmten Frequenz, die Gruppengeschwindigkeit als Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Signal, bestehend aus der Superposition von Wellen vieler Frequenzen, angesehen werden. Auch wenn in diesem Modell Phasen- und Gruppengeschwindigkeit den gleichen Wert haben, ist dies im Allgemeinen nicht der Fall. Dies führt beispielsweise zum Auseinanderlaufen eines Signals beim Propagandieren.

Betrachtet man den Abstand zweier Punkte gleicher Phase, so führt dies zu einer weiteren Größe zu Charakterisierung periodischer Wellen, der Wellenlänge λ . Sie entspricht dem Abstand zweier aufeinanderfolgender Maxima im Verlauf der Welle. Nach dieser Definition ergibt sich λ aus der Gleichung

$$y(x + \lambda, t) = y(x, t) \quad \Rightarrow \quad k\lambda = 2\pi$$

aufgrund der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion. Wellenlänge und Frequenz f einer Welle sind über die Ausbreitungsgeschwindigkeit c miteinander verknüpft. Es ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} c = \frac{c}{f} \tag{17}$$

Reflexion von Wellen Betrachtet man den Fall einer beliebigen Wellenfront auf der Saite, repräsentiert durch $y_1(x, t) := f(x + ct)$, die auf einen mechanisch befestigten Punkt zuläuft, so entspricht dies einer Randbedingung $y(x, t)|_{x \leq 0} = 0$. Eine Welle, die nur durch

y_1 dargestellt wird, kann der Randbedingung nicht genügen. Betrachtet man den Fall einer überlagerten Welle, also $y = y_1 + y_2$, wobei y_2 eine in positive Richtung propagierende Welle darstellt, also $y_2(x, t) = g(x - ct)$, ergibt sich aus der Randbedingung

$$0 = y(0, t) = f(ct) + g(-ct)$$

Die Funktionen f und g müssen also ursprungssymmetrisch zueinander sein. Ein einlaufendes Signal demnach wird an einem mechanisch befestigten Punkt reflektiert, so dass das auslaufende Signal die entgegengesetzte Amplitude aufweist. Im Falle von periodischen Wellen entspricht dies gerade einem Phasensprung um $\Delta\varphi = \pi$.

Die schwingende Saite Mit dem Wissen um die Reflexionen von Wellen an festen Enden, könnte jetzt die Schwingungsgleichung für den Fall einer schwingenden Saite mit dem D'Alembert Ansatz mit Rand- und Anfangsbedingungen gelöst werden. Eine andere Möglichkeit bietet sich hier mit dem Bernoulli-Ansatz. Dieser beruht auf dem mathematischen Hilfsmittel der Separation der Variablen. Weniger anschaulich als der D'Alembertsche Ansatz führt dieser allerdings einfacher auf die Eigenfrequenzen der schwingenden Saite. Man fasst also die unbekannte Funktion $y(t, x)$ als Produkt zweier unabhängiger Funktionen

$$y(x, t) := X(x) \cdot T(t) \tag{18}$$

auf. Eingesetzt in die Schwingungsgleichung und nach Variablen separiert folgt so

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \tag{19}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Variablen x und t müssen beide Seiten einer Variablen $-k^2$ entsprechen. Dies führt auf die beiden gewöhnlichen unabhängigen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + k^2 c^2 T = 0 \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0 \tag{20}$$

die einfach durch die komplexe Exponentialfunktion gelöst werden können. Es muss also gelten:

$$T(t) = b \cdot e^{-ikct} \quad X(x) = c \cdot e^{ikx}$$

Die komplexen Koeffizienten b und c der Funktionen sind dabei noch unbestimmt. Als Lösung der Schwingungsgleichung erhält man so mit der Abkürzungen $A := b \cdot c$

$$y(x, t) = A \cdot e^{-ikct+ikx}$$

Durch die Befestigung der Saite ergeben sich zwei Randbedingungen, die von der Lösung erfüllt werden müssen. Ist die Saite bei $x = 0$ und bei $x = L$ mechanisch befestigt, so muss

$$y(0, t) = y(L, t) \tag{21}$$

Diese Randbedingungen führt auf eine Einschränkung der bislang unbestimmten Variablen k . Es muss

$$A \cdot e^{-ikct} = A \cdot e^{-ikct+ikL} \Leftrightarrow e^{ikL} = 1 \Leftrightarrow kL = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Die unbekannte Wellenfunktion lässt sich in diesem Fall also als Linearkombination der gefundenen Lösungen schreiben. Somit gilt

$$y(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\frac{n\pi}{L}x - i\frac{n\pi c}{L}t} \quad (22)$$

Die Wellenfunktion der schwingenden Saite lässt sich also als Linearkombination periodischer Wellenfunktionen ausdrücken. Dabei lässt sich jede Frequenz der zu der Welle beitragenden Schwingung als vielfaches einer Grundfrequenz auffassen. Es ergibt sich als

$$\omega_n := n\frac{\pi c}{L} \quad (23)$$

Die Schwingung mit der Frequenz $\omega_0 := \pi c/L$ wird hierbei als Grundschwingung bezeichnet. Schwingungen mit einer Frequenz mit dem k -fachen der Grundschwingung werden als k -te Oberschwingung bezeichnet. Die Frequenz der k -ten Oberschwingung ist

$$f_k = \frac{\omega_{k+1}}{2\pi} = \frac{1+k}{2L}c \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Einfach zu zeigen ist, dass sich die Wellenlänge der entstehenden (Ober-)Schwingungen ebenfalls aus der Saitenlänge berechnen lässt. Es ist

$$\lambda_k = \frac{c}{f_k} = c\frac{2L}{1+k} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

wobei die Wellenlänge der Grundschwingung durch $k = 0$ dargestellt wird.

Anfangsbedingungen der befestigten Saite Wie auch im Fall ohne Anfangsbedingungen, können die bislang noch unbekanntenen Koeffizienten der einzelnen Wellenfunktionen nur durch gegebene Anfangsbedingungen bestimmt werden. Ist die Position und die Geschwindigkeit der Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \dot{y}(x, 0) = \dot{y}_0(x)$$

so können hieraus die Koeffizienten bestimmt werden. Hierbei bedient man sich dem mathematischen Hilfsmittel der Fourierreihe, mit der eine beliebige stetige Funktion $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(L)$ mit Hilfe einer komplexen Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inkx}$$

mit festem $k \neq 0$ dargestellt werden kann. Die Koeffizienten c_n ergeben sich dabei durch

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-inkx} dx$$

Betrachtet man nun die Lösung der Wellengleichung aus Gleichung (22) so fällt sofort die Ähnlichkeit zur Fourierreihendarstellung einer Funktion $f(x)$ auf. Nach Fourier ist

$$y_0(x) = \Re \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^0 e^{inkx} \right) \stackrel{!}{=} \Re \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right) = y(x, 0)$$

Analog gilt dies für

$$\dot{y}_0(x) = \Re \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{y}_n^0 e^{inkx} \right) \stackrel{!}{=} \Re \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} -i \cdot \frac{n\pi c}{L} A_n e^{i \frac{n\pi}{L} x} \right) = \dot{y}(x, 0)$$

Identifiziert man $k = \frac{\pi}{L}$ so ergeben sich zwei Bestimmungsgleichungen für die komplexen Koeffizienten A_n wodurch diese exakt zu bestimmen sind.

$$\begin{aligned} \Re(A_n) &= \frac{1}{L} \Re \left(\int_0^L y_0(x) e^{-inkx} dx \right) \\ \Im(A_n) &= \frac{1}{n\pi c} \Re \left(\int_0^L \dot{y}_0(x) e^{-inkx} dx \right) \end{aligned}$$

Die Darstellung der komplexen Exponentialfunktion als Sinus- und Kosinusfunktionen ermöglicht die Darstellung der Bewegungsgleichung als rein reelle Funktion. Bei gegebenen Anfangsbedingungen ist so

$$y(x, t) = \sum_k = 1^\infty \left(a_n \cos \left(n \frac{\pi c}{L} x \right) + b_n \sin \left(n \frac{\pi c}{L} x \right) \right) \sin \left(n \frac{\pi}{L} x \right) \quad (25)$$

Die Koeffizienten a_n und b_n ergeben sich hierbei aus den Anfangsbedingungen

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L y_0(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \quad b_n = \frac{1}{n\pi c} \int_0^L \dot{y}_0(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \quad (26)$$

2.3 Messmethoden an der Saite

Nach der Beschreibung der physikalischen Gegebenheiten an der schwingenden Saite, soll im Folgenden auf die Messmethoden an der schwingenden Saite eingegangen werden. Die Bestimmung der Grundfrequenz der gespannten Saite steht hierbei im Vordergrund. Die Anregung der Saite erfolgt jeweils durch Zupfen an der Saitenmitte. Hierdurch wird erreicht, dass sich hauptsächlich die Grund- und Oberschwingungen geringer Ordnung als Wellenfunktion auf der Saite ergeben.

2.3.1 Optische Messung

Die optische Messung der Grundfrequenz der Saite ist mit Hilfe eines technischen Tricks möglich. Das menschliche Auge ist nicht mehr in der Lage die Bewegungen der Saite als bewegten Körper wahrzunehmen, sondern nimmt die von der Saite überstrichene Fläche als Fläche wahr. Nutzt man als Beleuchtung, das Licht einer gepulsten Lichtquelle, zum Beispiel eines Stroboskops, so können Momentaufnahmen der Saite betrachtet werden. Die Folge der Momentaufnahmen der Saite wird von menschlichen Gehirn, ähnlich wie bei Filmen, als eine Bewegung wahrgenommen.

Durch eine Variation der Frequenz der Lichtimpulse kann so eine Blitzlichtfrequenz gefunden werden, bei der die Saite ruhend erscheint. Ist diese Frequenz f_{St} gefunden, so kann entweder die gefundene Frequenz entweder der Frequenz der Grundschwingung f_0 der Saite, oder einem Ganzzahligen vielfaches dieser entsprechen. Es ist

$$f_0 = n \cdot f_{St} \quad n = 1, 2, \dots$$

Die Unsicherheit durch diese Messmethode kann mit einer zusätzlichen Einstellung am Stroboskop ausgeschlossen werden. Verdoppelt man die Stroboskopfrequenz und sind daraufhin zwei ruhende Saiten mit gleicher Helligkeit wahrzunehmen, so war die zuerst eingestellte Frequenz die Grundfrequenz der Saitenschwingung. Grund hierfür ist die ein- bzw. zweimalige „Betrachtung“ der Saite während einer Periode der Schwingung. Da die Amplitude der Grundschiwingung im Vergleich zur zweiten Oberschiwingung an der Saitenmitte sehr groß, ist erlaubt die stroboskopische Messung sehr genaue Messergebnisse, wenn die technischen Voraussetzungen hierfür gegeben sind.

2.3.2 Schwingungsmessung

Ähnlich zu der stroboskopischen Messung beruht die Schwingungsmessung auf der Auslenkung der Saite. Hierzu wird die Saite in eine Lichtschranke gebracht, die beim Verdecken des Lichtwegs einen Messimpuls an ein geeignetes Messgerät übermittelt. Dieses „zählt“ das auftreten der Messimpulse in einem bestimmten Zeitraum. Aus der Anzahl der gemessenen Impulse wird nun eine Frequenz ermittelt und angezeigt. Bis auf eine experimentell bedingte Fehlerquelle bietet diese Art der Messung ebenfalls eine relativ genaue Möglichkeit zur Bestimmung der Grundfrequenz. Es muss darauf geachtet werden, wie oft die Lichtschranke innerhalb einer Periode der Schwingung durchlaufen wird.

Sowohl die Messung mit dem Stroboskop als auch die Messung mit einer Lichtschranke erfordern eine relativ große Auslenkung der Saite. Diese ist bei großen Längen und den damit verbundenen kleinen Frequenzen gegeben, wird bei kleineren Saitenlängen oder größeren Saitenspannungen immer schwieriger zu gewährleisten.

2.3.3 Digitale Spektralanalyse

Die genaueste Messung der Grundfrequenz bietet die Möglichkeit einer digitalen Messung. Diese wird durch einen PC mit entsprechender Software realisiert. Die digitale Messung der entstehenden Schwingungen wird durch die spektrale Analyse von einem über die Soundkarte gemessenen akustischen Signal bewerkstelligt.

Von der Saite zum Ton Die von der Saite ausgeführten Schwingungen führen zwar selbst zu einem wahrnehmbaren akustischen Signal, welches aber von der Signalstärke nicht ausreichend ist. Akustische Signale gehorchen wie auch die eindimensionale Wellen einer Saite einer Wellengleichung. Dabei sind die akustischen Wellen nicht wie die Saitenwellen transversaler sondern longitudinaler Natur.

Zur akustischen Verstärkung der von der Saite ausgeführten Schwingungen ist diese mit einem luftgefüllten Hohlraum, einem akustischen Resonator, verbunden. Bei einer Bewegung der Saite überträgt sich diese auf die Wände des akustischen Resonators. Durch die anregende Schwingung der Saite entsteht so im akustischen Resonator ein stärkeres akustisches Signal, als die reine Bewegung der Saite ohne Resonator bewirken würde, die Schwingungen der Saite werden verstärkt.

Die Verstärkung von Tönen mit einer Frequenz nahe der Resonanzfrequenz von akustischen Resonatoren ist dabei am größten. Oft besitzen die akustischen Resonatoren von Musikinstrumenten mehr als eine Eigenfrequenz, so dass die Verstärkung eines ganzen Spektrums möglich wird.

Digitale Töne Nach einer Verstärkung eines akustischen Signals im Resonator muss für eine digitale Weiterbearbeitung oder Auswertung das akustische Signal in ein digitales umgewandelt werden. In diesem Fall geschieht dies durch die Aufnahme mit Hilfe des analogen Eingangs der Soundkarte eines Computers.

Schallwellen können mit einem Mikrofon in ein analoges elektrisches Signal umgewandelt werden. In einem einfachen Mikrofon befindet sich eine Membran, die durch Schallwellen zum Schwingen angeregt wird. Ein an der Membran angebrachter Magnet, der sich aufgrund einer Bewegung der Membran in einer Spule bewegt, induziert in dieser eine zu der Bewegung der Membran proportionale Spannung. Dies ist ein kontinuierliches analoges elektrisches Signal, das sich zur Weiterverarbeitung eignet.

Als nächster Schritt wird das analoge Spannungssignal in ein digitales umgewandelt. Dies geschieht bereits im PC und wird durch spezielle elektrische Bauteile, sogenannte A/D-Wandler, bewerkstelligt. Das digitale Signal besteht im Endeffekt nach dem Digitalwandler aus einer Reihe diskreter Spannungswerte. Ein Nebeneffekt der Digitalisierung ist also die Diskretisierung des Signals. Zwei wichtige Größen kennzeichnen die Digitalisierung eines Signals. Die Abtast- oder Samplingrate gibt dabei an, wieviele Spannungsmessungen in einem bestimmten Zeitraum ausgewertet werden. Für verlässliche Messungen sollte die Abtastrate um vieles höher als die zu messenden Frequenzen sein, da sonst eine Aussage kaum möglich wird. Die zweite Kenngröße einer digitalen Abtastung ist durch das Sampleformat gegeben. Dieses gibt an, wie präzise ein Signal ausgewertet wird und entspricht der Speichergröße der verwendeten Variablen und somit dem Wertebereich. Typischerweise haben analoge Audiosignale einen Spannungsbereich von ca. $U \in [-15, 15]$, so dass bei der Auswertung mit $8bit$ ein Spannungsunterschied von $\Delta U \approx 0.12V$ als Werteunterschied bemerkbar ist. Bei einer Auswertung mit $32bit$ entspricht der darstellbare Spannungsunterschied bei theoretischen $\Delta U \approx 1 \cdot 10^{-9}V$.

Spektrale Untersuchung - DFT Ein ursprünglich akustisches Signal ist nach der Aufnahme durch den PC als eine Menge diskreter digitaler Daten vorhanden. Dabei ist der Signalverlauf proportional zum Verlauf des akustischen Signals. Die spektrale Analyse des Signals ermöglicht so einen Rückschluss auf die im akustischen Signal vertretenen Frequenzen. Ein Hilfsmittel bildet hierbei die Diskrete Fourier Transformation, die es ermöglicht die spektralen Bestandteile eines Signals aus dem Signal zu erhalten.

Auf die Herleitung der Formeln der DFT soll hier verzichtet werden. Es sei nur genannt, dass zu einem bekannten diskreten Signal t_n die DFT ein diskretes Spektrum f_n liefert. Es ist

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} t_n e^{-2\pi i \frac{nk}{N}}$$

Ein anderer Algorithmus, der auf der DFT beruht, ist die schnelle Fouriertransformation (FFT). Sie kann angewendet werden, wenn die Länge der zu transformierenden Signale einer Potenz der Zwei entsprechen.

Beispiel Am Beispiel eines im Praktikum aufgezeichneten Signals, soll hier die Spektralanalyse mit der Fouriertransformation dargestellt werden. Die Aufzeichnung erfolgte mit einem Samplingformat von $32bit$ und einer Abtastrate von $8kHz$. Die Aufnahme wurde durch den PC digital verstärkt, so dass eine genaue Analyse möglich wird. Es wurde die Schwingung der Saite bei einer Saitenlänge von $L = 120cm$ und einem Spannungsgewicht von

$m = 11\text{kg}$ aufgenommen. Für den Graph des Signalverlaufs aus (2) wurden hier nur 512 Signalpunkte ausgewählt, da mehr Punkte keine Struktur mehr erkennen ließen.

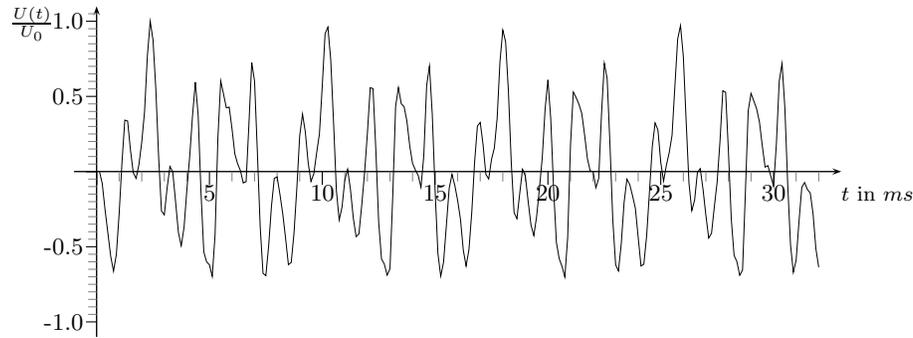


Abbildung 2: Der Signalverlauf der aufgezeichneten Saitenschwingung mit einer Saitenlänge von $L = 120\text{cm}$ und einer Zugspannung von $F = 110\text{N}$. Aufgetragen sind 512 Datenpunkte einer Aufnahme mit $8\text{kHz} - 32\text{bit}$.

Schon am Graph des Signalverlaufs lässt sich eine Periodizität erkennen, deren Periodendauer $T \approx 7\text{ms}$, was auf eine Trägerfrequenz im Bereich von $f = 140\text{Hz}$ schließen lässt. Eine Fouriertransformation liefert nun zu dem Signalverlauf die Frequenzbestandteile des Spektrums. Abbildung (3) zeigt den Graph der Fouriertransformierten. Dabei wurde der FFT-Algorithmus mit einer Datenpaketlänge von $n = 2048$ genutzt.

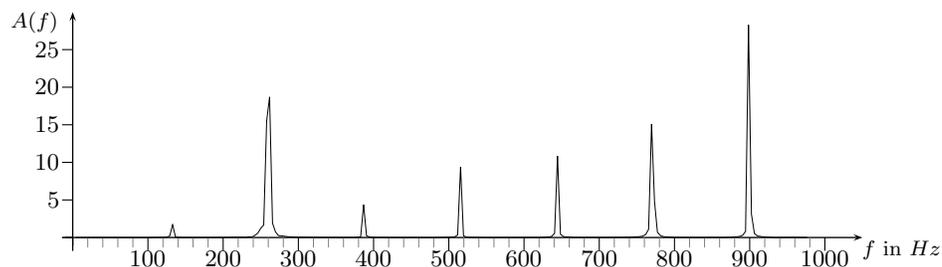


Abbildung 3: Das Spektrum der aufgezeichneten Saitenschwingung mit einer Saitenlänge von $L = 120\text{cm}$ und einer Zugspannung von $F = 110\text{N}$. Aufgetragen sind die ersten 250 Datenpunkte einer FFT des Signals aus (2) mit 2048 Datenpunkten.

Sehr deutlich ist im Spektrum die Zusammensetzung des Signals aus diskreten Frequenzen erkennbar. Die Grundschiwingung mit einer Frequenz von $f = 132.8\text{Hz}$ ist erkennbar. Deutlicher zu sehen ist hier die Zusammensetzung des Signals aus Schwingungen mit Frequenzen, die einem vielfachen der Grundfrequenz entsprechen.

Die zur spektralen Untersuchung des Signals eingesetzte Software nutzt eine FFT um den von der Soundkarte produzierten Datenstrom spektral darzustellen. Hierzu wird von dem kontinuierlichen Datenfluss eine bestimmte Anzahl Datenpunkte aufgezeichnet und ausgewertet. Der Vorgang wird wiederholt, so dass ein sich zeitlich verändertes Spektrum entsteht.

3 Versuch und Auswertung

Als Versuch wurden Messungen an einem Monochord, einem einsaitigen Musikinstrument vorgenommen. Dabei sind die Saitenspannung durch das Spannen der Saite mit unterschiedlichen Gewichten und die Saitenlänge durch einen geeigneten Keil, der zwischen Saite und Klangkörper gebracht werden kann und so die Länge der Saite einschränkt, variabel. Für unterschiedliche Gewichte und Saitenlängen wird nun die Frequenz der Grundschwingung mit den in Kapitel 2.3.2 beschriebenen Methoden bestimmt. Die Saite wird hierbei durch zupfen zu einer Schwingung angeregt.

3.1 Messungen

Insgesamt wurden für sieben unterschiedliche Gewichte und konstanter Saitenlänge und analog dazu für sieben unterschiedliche Saitenlängen bei konstantem Gewicht Messreihen aufgenommen. Für eine Messreihe wurde die Grundfrequenz der Saitenschwingung jeweils mehrfach mit der Stroboskopmethode, mit der Lichtschranke und durch die Spektralanalyse am PC bestimmt. Die Messreihen sind dem Versuchsprotokoll zu entnehmen.

Für die Messungen am PC können die Messwerte mit einer Unsicherheit von $\delta_f = 0.5Hz$ angegeben werden. Die verwendete Software erreichte bei der Messung eine Auflösung von $\Delta f = 0.2Hz$, so dass diese Unsicherheit gerechtfertigt ist. Die Messung mittels Lichtschranke und Zähler kann mit einer Unsicherheit von $\delta_f = 1Hz$ angegeben werden. Am Zähler konnte die Frequenz mit einer Skalierung von einem Hertz abgelesen werden, so dass diese Unsicherheit gerechtfertigt ist. Die „schlechteste“ Messung ist durch die Messung mit dem Stroboskop gegeben, da hier nur eine Unterteilung von fünf Hertz zur Verfügung stand. Über die Unsicherheit des Geräts ansich ist nichts bekannt, so dass bei dieser Messung eine Unsicherheit von $\delta_f = 5Hz$ nicht übertrieben ist.

Tabelle (1) stellt für die gemessenen Werte die Mittelwerte aus den Einzelmessungen für eine Art der Messung und den mittleren Wert aller Messungen dar. Die dabei angegebenen Unsicherheiten entstehen durch Fehlerfortpflanzung aus den Unsicherheiten der Messwerte.

$m[kg]$	$\bar{f}_{St}[Hz]$	$\bar{f}_{PC}[Hz]$	$\bar{f}_{LS}[Hz]$	$\bar{f}[Hz]$
5	98(4)	99.6(5)	100.3(7)	99(1)
7	110(4)	112.7(4)	113(7)	112(1)
10	124(4)	127.4(4)	131.8(7)	130(1)
11	126(5)	131.3(4)	131.8(7)	130(2)
13	135(4)	139.2(4)	139.3(7)	138(1)
12	131(4)	134.8(4)	135(7)	134(1)
14	135(4)	139.6(4)	139(7)	138(1)

Tabelle 1: Die Mittelwerte der gemessenen Frequenz der Grundschwingung einer Saite mit der Spannung durch die Masse m und einer Länge $L = 120cm$ für die Messung per Stroboskop \bar{f}_{St} , PC \bar{f}_{PC} , und Lichtschranke \bar{f}_{LS} , sowie das Mittel aller Werte \bar{f} .

Bei den Werten aus den ersten sieben Messreihen wurde jeweils nur die Spannung der Saite durch die Variation des spannenden Gewichts verändert, die letzten sieben Messreihen

entstehen durch die Variation der Saitenlänge bei konstanter Saitenspannung. Tabelle (2) zeigt, wie auch im ersten Fall die Mittelwerte der Einzelmessungen für die verschiedenen Messmethoden, sowie das Mittel aller Messungen. Auch hier entsteht der Fehler durch den Fehler der Mittelwertbildung aus den Unsicherheiten der Messwerte unter Berücksichtigung der Fehlerfortpflanzung.

l	$\bar{f}_{St}[Hz]$	$\bar{f}_{PC}[Hz]$	$\bar{f}_{LS}[Hz]$	$\bar{f}[Hz]$
8/9	137(4)	142(4)	142(7)	140(1)
4/5	154(4)	158.2(4)	158.5(7)	157(1)
3/4	163(5)	169.2(4)	169(7)	167(2)
2/3	184(5)	190.4(4)	190(7)	188(2)
3/5	204(4)	210.5(4)	211(7)	208(1)
5/8		237.0(4)		237.0(4)
5/6	147(4)	151.9(4)	152(7)	150(1)

Tabelle 2: Die Mittelwerte der gemessenen Frequenz der Grundschwingung einer Saite mit der Spannung durch die Masse $m = 10$ und der Länge $L = l \cdot 120\text{cm}$ für die Messung per Stroboskop \bar{f}_{St} , PC \bar{f}_{PC} , und Lichtschranke \bar{f}_{LS} , sowie das Mittel aller Werte \bar{f} .

3.2 Auswertung

Mit den gemessenen Werten sollen nun die aus der Theorie bekannten Zusammenhänge für Frequenz in Abhängigkeit der spannenden Masse, sowie die Frequenz in Abhängigkeit der Saitenlänge verifiziert werden. Dies ist am einfachsten durch die graphische Darstellung der Messergebnisse möglich.

3.2.1 Frequenz vs. Masse

Aus der Theorie geht hervor, dass für die Grundfrequenz der schwingenden Saite gilt:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2L\sqrt{\rho}}\sqrt{\tau} = \frac{1}{2L\sqrt{\rho A}}\sqrt{F} = \underbrace{\frac{\sqrt{g}}{2L\sqrt{\rho A}}}_{:=K}\sqrt{m}$$

Hierbei ist die Länge der Saite L , die Dichte ρ , sowie die Querschnittsfläche A und die Erdbeschleunigung g unbestimmt aber konstant. Dieser Term wird als eine Konstante K abgekürzt. Durch Quadrierung beider Seiten erhält man nun

$$K^2 m = f^2 = e^{2 \cdot \ln(f)}$$

Die etwas komplizierte Formel lässt sich nun weiter vereinfachen, indem die Exponentialfunktion durch beidseitiges Anwenden des natürlichen Logarithmus eliminiert wird. Es folgt:

$$2 \ln(f) = \ln(K^2 m) = 2 \ln(K) + \ln(m) \quad \Rightarrow \quad \ln(f) = \frac{1}{2} \ln(m) + \ln(K)$$

Bei logarithmischer Skalierung des Schaubildes, welche die Werte der Frequenz in Abhängigkeit der Masse darstellt, erwartet man so den Graph einer Gerade mit der Steigung $1/2$.

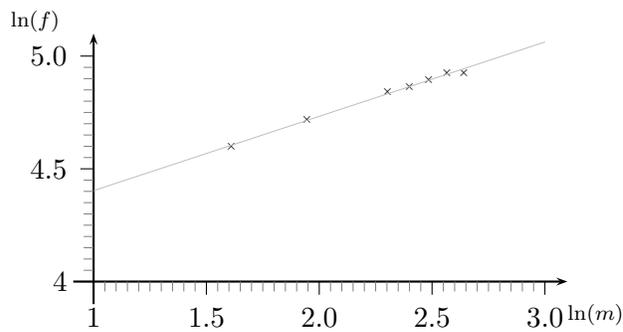


Abbildung 4: Die Darstellung der gemittelten Frequenzen aus Tabelle (1) mit logarithmischer Skalierung. Die eingezeichnete Gerade entsteht durch Ausgleichsrechnung.

Abbildung (4) stellt den natürlichen Logarithmus der Werte für die Masse m und die Grundfrequenz f aus Tabelle (1) graphisch dar. Die durch lineare Regression entstandene Gerade hat in diesem Fall eine Steigung von $m = 0.33(3)$ wobei die erwartete Steigung von $1/2$ nicht im 95%-Konfidenzintervall der errechneten Steigung liegt.

3.2.2 Frequenz vs. Saitenlänge

Der zweite Teil der Messung und damit auch der Auswertung soll nun die Abhängigkeit der Frequenz der entstehenden Grundschiwingung mit der Saitenlänge bestätigen. Wie im Theorieteil gezeigt gilt für die Frequenz der entstehenden Welle die Relation

$$f = \frac{1}{\lambda}c = \frac{c}{2L}$$

mit der Saitenlänge L und der Phasengeschwindigkeit c . Bei einer Auftragung der Frequenz zur reziproken Saitenlänge sollte so eine Gerade entstehen.

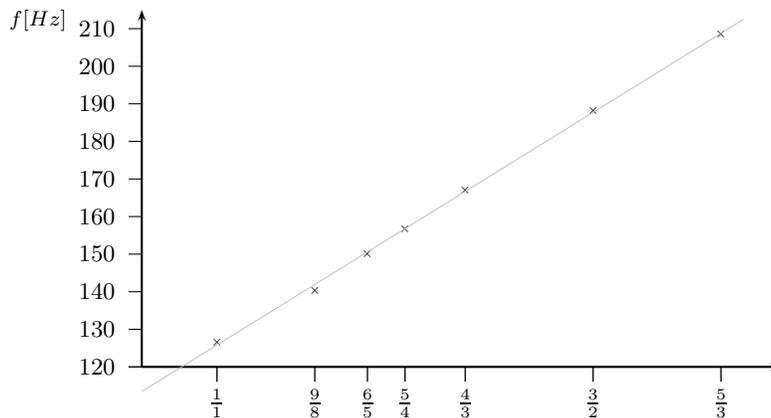


Abbildung 5: Die Darstellung der gemittelten Frequenzen aus Tabelle (2) in Abhängigkeit zur reziproken Saitenlänge, wobei diese als Verhältnis zur Länge $L_0 = 120\text{cm}$ dargestellt sind. Die eingezeichnete Gerade entsteht durch Ausgleichsrechnung.

Durch den linearen Verlauf des Graphen aus Abbildung (5) bestätigt sich nun auch die reziproke Abhängigkeit der Frequenz zur Saitenlänge. Die im Theorieteil hergeleitete Beziehung einer Saitenwelle bestätigt sich so experimentell.

3.3 Fehlerdiskussion

Eine Fehlerdiskussion ist hier aufgrund fehlender Referenzwerte leider nicht möglich. Lediglich bei einem Wert ist der Erwartungswert bekannt. Bei der Auswertung der Abhängigkeit der Grundfrequenz zur Saitenspannung war zwar der lineare Zusammenhang zu erkennen, entsprach aber nicht dem theoretisch errechneten Wert. Der so ermittelte kubische Zusammenhang zwischen Frequenz und spannender Masse könnte aber durch eine schlechte Kraftübertragung oder nichtlinearen Randeffekten beim Spannen der Saite erklärt werden.

Über die qualitative Verlässlichkeit der anderen errechneten und gemessenen Werte lässt sich allerdings keine Aussage machen. Trotzdem können systematische Fehler durch die Messung mit drei voneinander unabhängigen Methoden nahezu ausgeschlossen werden. Die einzige Fehlerquelle, die einen systematischen Fehler erzeugen könnte, der nicht durch den Vergleich der Messwerte auffallen würde, ist ein Fehler bei den Gewichten zum Erzeugen der Saitenspannung und in der Führung der Saite. Aufgrund der schon beschriebenen Abweichung bei der Auswertung der ersten Messreihen scheint hier ein systematischer Fehler vorzuliegen.

Die reine Messung der Frequenzen ist aufgrund der Messung mit verschiedenen Methoden als relativ exakt zu werten. Hierbei fällt auf, dass die Messung mit Lichtschranke und digitalem Zähler, sowie mit dem PC immer größere Ergebnisse lieferten, als eine Messung mit dem Stroboskop. Der Fehler ist hierbei eindeutig bei der technischen Umsetzung der Stroboskopbeleuchtung zu suchen. Ob der Blitzlichtgenerator Lichtimpulse mit der eingestellten Frequenz lieferte, ist in diesem Zusammenhang nicht nachvollziehbar.

Als Resümee haben die Messungen an der schwingenden Saite die theoretischen Grundlagen bestätigt.

4 Fragen

1. Warum ist die bei den Schaubildern gewählte Art der Auftragung vorteilhaft?
siehe Kapitel 3.2
2. Ist c der Wellengleichung Phasen- oder Gruppengeschwindigkeit?
siehe 2.2 Abschnitt: Periodische Wellen
3. Um welchen Faktor muss die Kraft zum Spannen der Saite vergrößert werden, dass die Saite eine Oktave höher schwingt?
Die Oktave ist, abgeleitet von der musikalischen Oktave, die ein Tonverhältnis ausdrückt, durch ein Frequenzverhältnis gegeben. Dabei ist das Frequenzverhältnis durch $1 : 2$ definiert. Die Vergrößerung einer Frequenz um eine Oktave bedeutet also eine Frequenzverdopplung. Dies kann bei einer festen Saitenlänge theoretisch durch die Verdopplung der Phasengeschwindigkeit und somit durch eine vervierfachung der Saitenspannung erreicht werden. In Formeln ist

$$2 \stackrel{!}{=} \frac{f_2}{f_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{F_2}}{\sqrt{F_1}} \Rightarrow F_2 = 2^2 F_1 = 4F_1$$

4. Beweis des D’Lambertschen Ansatzes zur Lösung der Wellengleichung.
siehe 2.2

5. Gerät der Resonanzboden einer Geige beim Streichen einer Saite bei bestimmten Tönen in Resonanz.
Ja, der Resonanzkörper von Musikinstrumenten ist so angelegt, dass dieser mehrere Resonanzfrequenzen besitzt und ein breites Spektrum verstärken kann. Ohne die Resonanz im Resonanzkörper wäre kein Ton zu hören. (Vgl. auch Kap. (2.3.3) Abschnitt „Von der Saite zum Ton“)
6. Die Eigenfrequenzen einer schwingenden Luftsäule?
Auch hier sind die Eigenfrequenzen als vielfaches einer Grundfrequenz gegeben. Mit den etwas anderen Randbedingungen ergeben sich so die Frequenzen

$$f_k = \frac{1+k}{L}c \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Wobei c die Schallgeschwindigkeit in der Luft darstellt.

5 Verzeichnisse

5.1 Literaturverzeichnis

[WPEnz] Verschiedene *Wikipedia - Die freie Enzyklopädie* <http://de.wikipedia.org>

[APScript] B.RUNGE *Versuchsanleitung zur Saitenschwingung*