

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Das mathematische Pendel . . . . .	2
2.2	Das physikalische Pendel . . . . .	2
2.3	Lösung der Schwingungsgleichung . . . . .	4
2.4	Periodendauer für große Winkel . . . . .	4
2.5	Das Reversionspendel . . . . .	6
2.5.1	Bestimmung von $g$ für unterschiedliche Periodendauern . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Versuch und Auswertung</b>	<b>8</b>
3.1	Bestimmung von $g$ für $T = T'$ . . . . .	8
3.2	Bestimmung von $g$ für $T \neq T'$ . . . . .	10
3.3	Bestimmung von $g$ für $\alpha = 0$ . . . . .	11
3.4	Fehlerdiskussion . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Fragen</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Verzeichnisse</b>	<b>13</b>
5.1	Literaturverzeichnis . . . . .	13
<b>A</b>	<b>Zur Rechnung aus 3.1</b>	<b>13</b>
<b>B</b>	<b>Messprotokoll aus dem Praktikum</b>	

# 1 Einleitung

Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung. Neben Beschleunigungs- und Kraftmessungen lässt sich die Erdbeschleunigung auch mit der Hilfe von Pendelschwingungen bestimmen. Hierzu werden die Perioden eines speziellen Pendels, des Reversionspendels gemessen.

## 2 Physikalische Grundlagen

Im Folgenden sollen die für die Versuchsbeschreibung wichtigen physikalischen Grundlagen genannt und erläutert werden.

### 2.1 Das mathematische Pendel

Das einfachste Pendel stellt der idealisierte Fall eines mathematischen Pendels dar. Dabei wird eine Punktmasse der Masse  $m$  an einem masselosen Faden der Länge  $l$  in das Schwerfeld der Erde gebracht. Zur mathematischen Beschreibung des Problems bieten sich hier Zylinderkoordinaten an. Zum Aufstellen der Bewegungsgleichung wird nun die

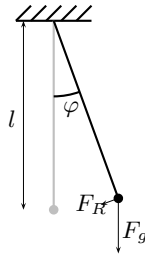


Abbildung 1: Zu den Kräften am mathematischen Pendel. Die rückstellende Kraft lässt sich aus dem Auslenkwinkel  $\varphi$  leicht errechnen.

rückstellende Kraft auf die Punktmasse betrachtet, die sich in diesem Fall als auf dem Faden senkrecht stehende Kraftkomponente und somit als  $F_R = -mg \sin(\varphi)$  ergibt. Mit dem zweiten Newtonschen Axiom ergibt sich so die Bewegungsgleichung durch

$$ml\ddot{\varphi} = m\ddot{r} = F_R = -mg \sin(\varphi)$$

und umgeformt als

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0 \quad (1)$$

Hierbei wird der Quotient aus Erdbeschleunigung und Fadenlänge als Kreisfrequenz  $\omega_0$  der entstehenden Schwingung bezeichnet.

### 2.2 Das physikalische Pendel

Die Abstraktionen des mathematischen Pendels bezüglich der Aufhängung und der endlichen Ausdehnung wird bei der Betrachtung eines physikalischen Pendels nicht vorgenommen. So kann die Schwingung eines beliebigen Körpers beschrieben werden.

Wird ein Körper außerhalb seines Schwerpunkts beweglich um eine Achse in das Schwerkfeld der Erde gebracht, so wirkt hier ein rücktreibendes Drehmoment.

Bezeichnet  $s$  den Abstand der Drehachse zur Schwerpunktachse und  $m$  die Gesamtmasse des Körpers so ergibt sich das rücktreibende Drehmoment als

$$M = -gsm \sin \varphi$$

Mit dem Trägheitsmoment des Körpers  $\Theta$  um die Drehachse ergibt sich nun allgemein

$$\Theta \ddot{\varphi} = M = -gsm \sin \varphi$$

oder umgeformt

$$\ddot{\varphi} + \frac{gsm}{\Theta} \sin(\varphi) \quad (2)$$

Hier definiert sich die Kreisfrequenz  $\omega_0$  der entstehenden Schwingung als

$$\omega_0^2 = \frac{gsm}{\Theta} \quad (3)$$

In Analogie zum mathematischen Pendel definiert man bei einem physikalischen Pendel die reduzierte Pendellänge  $l_r$  als die Länge eines mathematischen Pendels, mit der gleichen Kreisfrequenz  $\omega_0$ . Es ergibt sich

$$l_r = \frac{sm}{\Theta} \quad (4)$$

Betrachtet man nun ein physikalisches Pendel, welches an verschiedenen Achsen aufgehängt werden kann und hier speziell die Schwingung um zwei parallele Achsen  $A$  und  $A'$ , die den Abstand  $l_r$  voneinander haben und sich durch eine Gerade durch den Schwerpunkt verbinden lassen, so ergeben sich die Kreisfrequenzen bzw. deren Quadrate als

$$\omega_0^2 = \frac{gsm}{\Theta} \quad \omega_0'^2 = \frac{g(l_r - s)m}{\Theta'}$$

Mit dem Steinerschen Satz für Trägheitsmomente lassen sich die beiden Kreisfrequenzen auch durch das Trägheitsmoment  $\Theta_S$  um den Schwerpunkt errechnen. Es ist

$$\omega_0^2 = \frac{gsm}{\Theta_S + ms^2} \quad \omega_0'^2 = \frac{g(l_r - s)m}{\Theta_S + m(l_r - s)^2}$$

Umformen der ersten Gleichung nach  $\Theta_S$  und Einsetzen in die zweite liefert nun

$$\begin{aligned} \omega_0'^2 &= \frac{g(l_r - s)m}{\Theta_S + m(l_r - s)^2} = \frac{g(l_r - s)m}{\frac{gsm}{\omega_0^2} - ms^2 + m(l_r - s)^2} \\ &= \frac{g(l_r - s)}{\frac{gs}{\omega_0^2} - s^2 + l_r^2 - 2l_r s + s^2} = \frac{g(l_r - s)}{gs + \omega_0^2 l_r^2 - 2\omega_0^2 l_r s} \omega_0^2 \\ &= \frac{g(l_r - s)}{gs + gl_r - 2gs} \omega_0^2 = \omega_0^2 \end{aligned}$$

Offenbar sind die Kreisfrequenzen der Schwingungen um beide Achsen  $A$  und  $A'$  gleich.

### 2.3 Lösung der Schwingungsgleichung

Beide betrachteten Pendel führen auf die gleiche Differentialgleichung, die es zu lösen gilt. Die Linearisierung des Problems hilft hier bei der Lösung. Für kleine Winkel  $\varphi$  kann der Sinus-Term der Bewegungsgleichungen mittels Taylor abgeschätzt werden. Dann gilt  $\sin(\varphi) \approx \varphi$  womit sich die Bewegungsgleichung vereinfacht zu

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (5)$$

Diese kann durch die Sinus oder Kosinusfunktion gelöst werden. Ein Ansatz

$$\varphi = \alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

löst die Bewegungsgleichung. Hierbei werden die Konstanten  $\alpha$  und  $\varphi_0$  durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

Durch die Lösung der Differentialgleichung lässt sich hier nun auch eine Periodendauer  $T$ , also die Zeit nach der sich die Schwingung periodisch wiederholt, bestimmen. Es ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6)$$

### 2.4 Periodendauer für große Winkel

Für große Winkel ist die Schwingungsdauer nicht so einfach zu bestimmen. Mit Hilfe des mathematischen Pendels kann aber auch für diesen Fall eine exakte Lösung hergeleitet werden. Sei  $\alpha$  also nun der Auslenkwinkel zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Das Pendel habe hier keine Anfangsgeschwindigkeit. Es gilt die Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos(\varphi) = T + U = -mgl \cos(\varphi_0) = -mgl \cos(\alpha)$$

Auflösen nach der Ableitung  $\dot{\varphi}$  liefert nun

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos(\varphi) - \cos(\alpha))}$$

Die Separation der Variablen und Integration über eine viertel Periode liefert nun

$$\frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos(\varphi) - \cos(\alpha))}}$$

Für die Periodendauer  $T$  gilt nun also

$$T = \sqrt{\frac{8l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi) - \cos(\alpha)}} \quad (7)$$

Aus der Identität  $\sin(\alpha/2)^2 = (1 - \cos(\alpha))/2$  für die Sinusfunktion folgt nun

$$\cos(\varphi) - \cos(\alpha) = 1 - 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - 1 + 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2 \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \right]$$

Hiermit kann die Periodendauer weiter umgeformt werden zu

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}}$$

Für eine Substitution  $\sin(\varphi/2) = \sin(\alpha/2) \sin(\gamma)$  gilt nun

$$\varphi = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \quad \varphi = \alpha \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$$

sowie für die Substitution des Differentials

$$d\varphi = \frac{2 \sin(\alpha) \cos(\gamma)}{\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sin(\gamma)^2}} d\gamma$$

Die Identität  $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$  bestätigt die Gleichung

$$\cos(\gamma) = \sqrt{1 - \sin(\gamma)^2} = \sqrt{1 - \frac{\sin(\varphi/2)^2}{\sin(\alpha/2)^2}}$$

Angewandt auf das Integral zur Bestimmung der Periodendauer folgt

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\gamma)}{\sqrt{1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sin(\gamma)^2} \sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{\sin(\varphi/2)^2}{\sin(\alpha/2)^2}\right)}} d\gamma \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin(\gamma)^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

mit  $k = \sin(\alpha/2)^2$ . Des weiteren muss das Integral gelöst werden. Der Ansatz einer Binomischen Reihe, also

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^m \left(\frac{m+1-i}{i}\right) x^m$$

liefert eingesetzt

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \left( \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^m \left(\frac{\frac{1}{2}-i}{i}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^m k^{2m} \sin(\gamma)^{2m} d\gamma \right)$$

Der Wert des so entstehenden bestimmten Integrals ist bekannt. Es ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\gamma)^{2m} d\gamma = \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^m \frac{2i-1}{2i}$$

so dass für die Periodendauer  $T$  gilt

$$\begin{aligned}
 T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \left( \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^m \left( \frac{\frac{1}{2} - i}{i} \right) (-1)^m k^{2m} \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^m \left( \frac{2i-1}{2i} \right) \right) \\
 &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \left( \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m k^{2m} \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^m \left( \frac{\frac{1}{2} - i}{i} \cdot \frac{2i-1}{2i} \right) \right) \\
 &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^m \left( \frac{i - \frac{1}{2}}{i} \cdot \frac{2i-1}{2i} \right) k^{2m} \right) \\
 &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^m \frac{2i-1}{2i} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{2m} \right) \tag{9}
 \end{aligned}$$

Die Periodendauer ist also für große Amplituden  $\alpha$  größer als der durch die lineare Näherung in der Schwingungsgleichung erwartete Wert.

## 2.5 Das Reversionspendel

Das Reversionspendel ist ein spezielles physikalisches Pendel. Es besteht aus einer Pendelstange, an der zwei Gewichte variabel angebracht werden können. Die Gewichte werden nun so an der Pendelstange befestigt, dass eine Achse  $A$  zwischen den Gewichten liegt. Eine zweite Achse  $A'$  befindet sich im Abstand  $a$  von der der ersten Achse. Das Gewicht zwischen den Achsen wird während des Versuchs verschoben. Der Abstand des Mittelpunkts des mittleren Gewichts und der Pendelachse  $A$  wird im Folgenden als  $x$  bezeichnet. Vergleiche auch Abbildung (2).

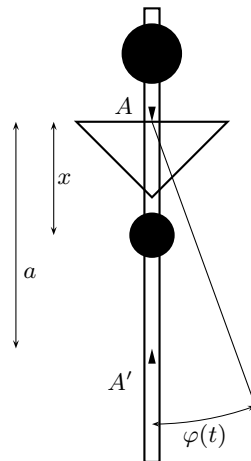


Abbildung 2: *Schema des Reversionspendels aus dem Versuch. Die wichtigen Größen sind in der Skizze vermerkt.*

Ziel des Versuchs ist es nach wie vor die Erdbeschleunigung  $g$  zu bestimmen. Diese lässt sich aus der Periodendauer einer Schwingung des Reversionspendels berechnen, wenn die

reduzierte Pendellänge bekannt ist. Der einfachste Fall ist der, dass der Abstand  $x$  des inneren Gewichts so verändert wird, dass die Periodendauer für eine Schwingung um die Achse  $A$  der einer Schwingung um die Achse  $A'$  entspricht. Ist dies der Fall, so ergibt sich die reduzierte Pendellänge gerade als der Abstand der Pendelachsen, also  $a$ . Dies wurde bereits in Abschnitt 2.2 gezeigt. So kann aus der Periodendauer mit Gleichung (6) oder, wenn große Auslenkwinkel gemessen wurden, aus Gleichung (9) die Erdbeschleunigung errechnet werden.

### 2.5.1 Bestimmung von $g$ für unterschiedliche Periodendauern

Es gibt ebenfalls eine Möglichkeit die Erdbeschleunigung aus den Periodendauern zu errechnen, auch wenn diese unterschiedlich sind. Hierbei ist aber eine weitere Größe von Nöten, der Abstand des Schwerpunkts des Pendels  $s$  zur Pendelachse  $A$ . Für diesen Abstand gilt, bei Vernachlässigung der Pendelstangenmasse

$$s = \left| \frac{m_a \cdot d - m_i \cdot x}{m_a + m_i} \right|$$

wobei  $d$  den Abstand des äußeren Gewichts zur Achse darstellt. Mit der Definition der reduzierten Pendellänge kann nun diese für eine Schwingung um die Achse  $A$  bestimmt werden.

$$l_r = \frac{\Theta}{ms} = \frac{\Theta_s + ms^2}{ms} = \frac{\Theta_s}{ms} + s$$

Hierbei stellt  $\Theta_s$  das Trägheitsmoment einer Rotation um den Schwerpunkt dar. Es wurde der Steinersche Satz genutzt. Analog gilt für die reduzierte Pendellänge einer Schwingung um die Achse  $A'$

$$l'_r = \frac{\Theta}{ms'} = \frac{\Theta_s}{ms'} + s'$$

wobei  $s' = a - s$  den Abstand des Schwerpunkts zur Achse  $A'$  darstellt. Nun folgt

$$(l_r - s)s = \frac{\Theta_s}{m} = (l'_r - s')s' \quad (10)$$

Mit der Definition der Kreisfrequenz und Formel (6) ist nun

$$\left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \omega_0^2 = \frac{g}{l_r} \quad \Rightarrow \quad l_r = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

analog gilt dies für  $l'_r$ , so dass aus Gleichung (10) folgt

$$\frac{gT^2}{4\pi^2}s - s^2 = \frac{gT'^2}{4\pi^2}s' - s'^2$$

Aufgelöst nach  $g$  und mit der Resubstitution von  $s'$  ist so

$$g = 4\pi^2 \frac{a^2 - 2sa}{T'^2 a - s(T^2 + T'^2)} \quad (11)$$

Die Erdbeschleunigung kann so auch aus Schwingungen um die Achsen berechnet werden, die nicht die selbe Kreisfrequenz und somit die gleiche Periodendauer besitzen.

### 3 Versuch und Auswertung

Zur Bestimmung der Erdbeschleunigung wurden an einem Reversionspendel Periodenmessungen vorgenommen. Das genutzte Reversionspendel entspricht der in der Theorie vorgestellten Apparatur, so dass die Zusammenhänge aus dem Theorieteil übernommen werden können.

Die Messung der Periodendauer  $T$  erfolgte im Praktikum durch ein geeignetes digitales Messgerät. Hierzu wurde an der jeweils oberen Seite des Pendels ein „Anzeiger“ angebracht, der während einer Periode eine Lichtschranke zweimal durchläuft und so ein elektrisches Signal an das digitale Messgerät übermittelt. Mit Hilfe eines Zählers am Messgerät kann so die Zeit für die eingestellte Anzahl von Verdunklungen der Lichtschranke und so die Periodendauer über mehrere Schwingungen bestimmt werden.

In einem ersten Teil des Versuchs wurden so für verschiedene Stellungen des mittleren Gewichts die Periodendauern gemessen, so dass das mittlere Laufgewicht in die Stellung gebracht werden konnte, dass die Schwingungsdauern um beide Achse nahezu identisch war. Aus dieser Periodendauer wird nun die Erdbeschleunigung bestimmt. In einem zweiten Versuchsteil wird die Schwingungsdauer in Abhängigkeit der Amplitude bestimmt. Aus den erhaltenen Messwerten kann so eine Schwingungsdauer für eine Schwingung mit der Amplitude „Null“ approximiert werden. Hierraus soll ebenfalls die Erdbeschleunigung errechnet werden.

Die gemessenen Werte sind dem Messprotokoll aus dem Anhang zu entnehmen. Es wurde jeweils die Dauer für fünf Perioden, also zehn Verdunklungen der Lichtschranke gemessen und notiert.

#### 3.1 Bestimmung von $g$ für $T = T'$

Die Bestimmung der Erdbeschleunigung für  $T = T'$  ist, sobald diese Periodendauer bekannt ist sehr einfach. Wie bereits gezeigt, ergibt sich hier die Reduzierte Pendellänge gerade als der Abstand der Achsen  $a$ . Es soll nun also versucht werden einen genauen Wert für  $T$  zu bestimmen.

Zuerst einige Skalierungsargumente, um den Graph der Funktion  $T(x)$  genauer spezifizieren zu können. Wie bereits gezeigt ist die Periodendauer abhängig vom Trägheitsmoment und dem Abstand des Schwerpunkts  $s$ . Es skalieren

$$T \propto \sqrt{\frac{\Theta}{ms}} = \sqrt{\Theta_s + ms^2}ms$$

Das Trägheitsmoment des Schwerpunkts setzt sich nun aus den Trägheitsmomenten aller Massen zusammen. Eine Folgerung des Steinerschen Satzes liefert so

$$\Theta_s \propto d + s^2$$

mit einer unbestimmten Konstante  $c$ . Da nun  $s \propto b + x$  mit ebenfalls unbekannter Konstante  $b$  gilt

$$T \propto \sqrt{\frac{d + s^2 + ms^2}{ms}} \propto \sqrt{\frac{a}{b + x} + c(b + x)}$$

Der funktionale Zusammenhang von Periodendauer  $T$  und Abstand des mittleren Gewichts zu einer Achse  $x$  ist also durch

$$T(x) = \sqrt{\frac{a}{b + x} + c(b + x)} \quad (12)$$



mit den unbekanntenen Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $c$  gegeben. Anhand der gemessenen Werte können die Parameter nun mittels Minimierung der Abstandsquadrate bestimmt werden.

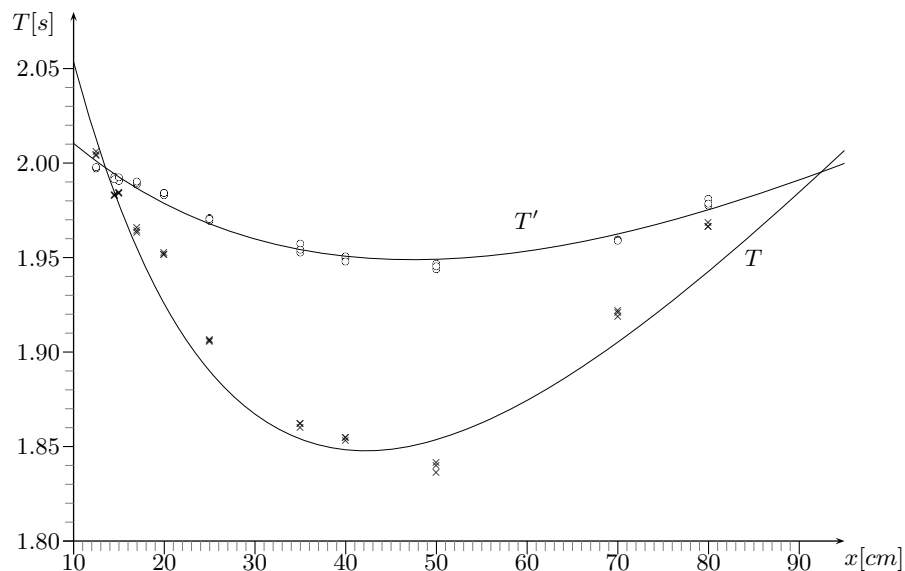


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Messwerte mit der Modellierung des Systems durch Gleichung (12). Aufgetragen sind die Messwerte für die Periodendauer  $T$  um die Achse  $A$  sowie  $T'$  für die Schwingung um die Achse  $A'$  in Abhängigkeit der Stellung des mittleren Gewichts  $x$ .

Abbildung (3) stellt die gemessenen Werte für die Periodendauer, sowie die durch Minimierung der Funktion aus Gleichung (12) entstandenen Modellierungen dar. Schon an den Graphen der Approximierten Funktionen ist erkennbar, dass die Modellierung des Verlaufes für  $T$  schlechter konditioniert ist, als die der Funktion  $T'$ . Dies spiegelt sich auch in den Fehlern der Koeffizienten wieder.

Die Koeffizienten ergeben sich für die Funktion  $T(x)$  zu

$$a = 112.1 \pm 3.5 \quad b = 23.49 \pm 1.5 \quad c = 0.02653 \pm 0.01$$

wobei die angegebenen Fehler dem Fehlerintervall von einfacher Genauigkeit entsprechen. Für den funktionalen Zusammenhang von  $T'(x)$  ergeben sich die Koeffizienten als

$$a = 236.5 \pm 5.5 \quad b = 77.19 \pm 2.5 \quad c = 0.01525 \pm 0.0008$$

Zum weiteren Vorgehen wird die Gleichheit der Funktionen  $T(x)$  und  $T'(x)$  gefordert. Dies liefert eine Bestimmungsleichung für den Gewichtsabstand  $\bar{x}$ , bei denen  $T(\bar{x}) = T'(\bar{x})$ . Durch Auswertung der Funktionen  $T$  oder  $T'$  an den Stellen  $\bar{x}_{1/2}$  ergeben sich nun die Schwingungsdauern  $\bar{T}_{1/2}$  für die die Schwingung um beide Achsen die gleiche Periode besitzt. Es ist

$$T_1 = 1.995s \pm 0.03s \quad T_2 = 1.986s \pm 0.09s$$

wobei der angegebene Fehler durch die Formeln zur Fehlerfortpflanzung aus den Fehlern der Koeffizienten errechnet wurde. Dabei entspricht  $T_1$  dem Wert für  $\bar{T}$  an der Stelle  $x_1 = 14.01cm$ , sowie  $T_2$  dem Wert bei  $x_2 = 86.85cm$ .

Aufgrund der höheren Anzahl der Messwerte im Bereich der Gewichtsstellung  $x_1$  ist dieser Wert für eine Berechnung der Erdbeschleunigung besser geeignet, da hier der Funktionsverlauf von  $T$  bzw  $T'$  besser der Wirklichkeit entspricht. Aus Formel (6) folgt nun

$$g = \frac{(2\pi)^2}{T^2} l_r$$

Die reduzierte Pendellänge ist hier durch den Abstand der Achsen  $a$  gegeben. Bei einem Wert von  $a = 1m$  und einer geschätzten Messungenauigkeit von  $\delta a = 1cm$  ergibt sich aus  $T_1$  die Erdbeschleunigung als

$$g = 9.909 \frac{m}{s^2} \pm 0.33 \frac{m}{s^2} \quad (13)$$

mit einem relativen Fehler von weniger als 4%. Der Literaturwert von  $g = 9.8067 \frac{m}{s^2}$  liegt so im einfachen Fehlerintervall der Messung.

Für die zweite Gewichtsposition  $x_2$  ergibt sich für  $g$  ein Wert von

$$g = 10.01 \frac{m}{s^2} \pm 0.89 \frac{m}{s^2}$$

Hier ist wie erwartet der Wert weiter vom Literaturwert entfernt. Dieser liegt aber auch hier im Fehlerintervall um den errechneten Wert. Allerdings ist der relative Fehler von knapp 9% wesentlich höher als der Fehler des ersten Werts.

Die Ausführungen der Rechnungen an dieser Stelle sind aufgrund der relativ langen Umformungen und Rechenschritte nicht möglich. Das zur Auswertung genutzte Maple-Worksheet ist im Anhang zu finden.

### 3.2 Bestimmung von $g$ für $T \neq T'$

Wie schon im Theorieteil erläutert, gibt es ebenfalls eine Möglichkeit die Erdbeschleunigung aus den Paaren einzelner Messwerte zu errechnen. Hierzu wird zu jedem Paar  $T$  und  $T'$  mit Hilfe von Formel (11) der Wert von  $g$  berechnet. Durch anschließende Mittelung lässt sich so die Erdbeschleunigung näherungsweise bestimmen. Aufgrund fehlender Messwerte für den Schwerpunkt der Pendelstange muss diese hier vernachlässigt werden, so dass der Schwerpunktabstand  $s$  durch

$$s = \left| \frac{m_a \cdot d - m_i \cdot x}{m_a + m_i} \right|$$

bestimmt wird. Aufgrund der Vernachlässigung der Pendelstange erwartet man hier keinen guten Messwert.

Durch die Anwendung von Formel (11) auf die gemessenen Werte, sowie einem Abstand des äußeren Gewichts von  $d = 8cm$  ergibt sich  $g$  durch Mittelung der errechneten Werte als

$$g = 10.71 \frac{m}{s^2} \quad \sigma_g = 0.72 \frac{m}{s^2}$$

mit der Standardabweichung  $\sigma_g$ . Wie erwartet liegt der Literaturwert hier nicht im einfachen Fehlerintervall des berechneten Werts.

### 3.3 Bestimmung von $g$ für $\alpha = 0$

Im zweiten Versuchsteil soll die Periodendauer aus der nichtlinearen Schwingungsgleichung, dargestellt in Gleichung (9) genutzt werden. Hierzu wurde die Position des mittleren Gewichts so gewählt, dass die Schwingungsdauer um beide Achsen als nahezu identisch bestimmt werden konnte. Gewählt wurde eine Position von  $x = 14\text{cm}$ . Daraufhin wurde die Periodendauer  $T$  für verschiedene Amplituden  $\alpha$  der Schwingung bestimmt. Die gemessenen Periodendauern für jeweils 5 Perioden sind dem Messprotokoll zu entnehmen. Anhand von Formel (9) ist zu erkennen, dass sich die Periodendauer als Potenzreihe des Arguments  $k = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$  darstellen lässt. Abbildung (4) stellt die gemessenen Periodendauern in Abhängigkeit des Arguments  $k$  graphisch dar.

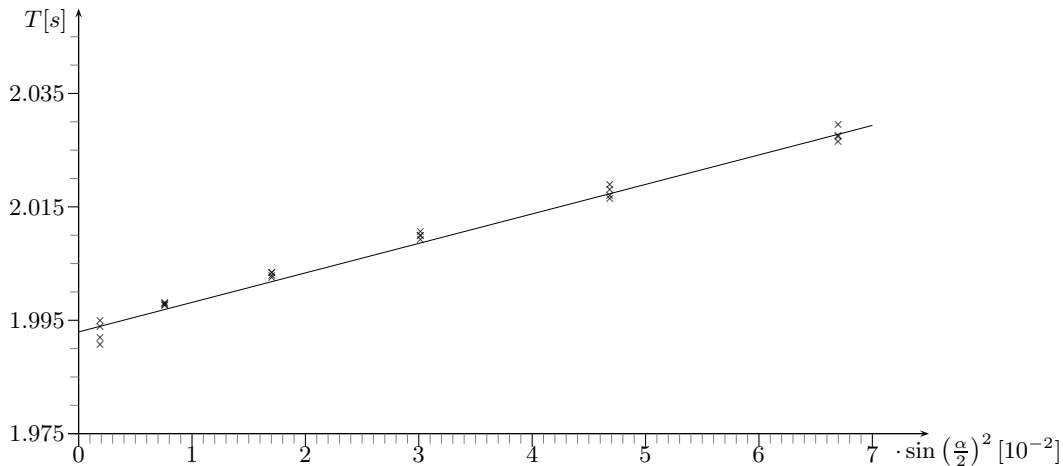


Abbildung 4: Graphische Darstellung der Messwerte des zweiten Versuchsteils. Eingezeichnet sind die Messwerte, für  $T(\alpha)$  über  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$  sowie die Ausgleichsgerade

Das statistische Hilfsmittel der linearen Regression erlaubt hier, sofern nur die linearen Terme in  $k$ , also

$$T(k) = T(0) + m \cdot k$$

angenommen wird, die Bestimmung des Koeffizienten  $m$  und  $T(0)$ , der sich als y-Achsenabschnitt der Ausgleichsgerade ergibt. Mit Hilfe der in [APFeh] angegebenen Formeln zur linearen Regression ergibt sich so

$$T(0) = 1.993s \pm 0.0004s$$

Aus Formel (9) folgt sofort für  $\alpha = 0$  und der reduzierten Pendellänge  $l_r = a$

$$g = \frac{(2\pi)^2}{T^2} l_r$$

Es ergibt sich so

$$g = 9.934 \frac{m}{s^2} \pm 0.099 \frac{m}{s^2} \quad (14)$$

Im Vergleich zur ersten Bestimmung von  $g$  aus dem ersten Teil der Versuchsauswertung konnte durch die Approximation der Schwingungsdauer für Schwingungen ohne Amplitude die relative Genauigkeit der Messung auf knapp 1% reduziert werden. Allerdings liegt hier der Literaturwert für  $g$  nicht mehr im einfachen Fehlerintervall der Messung. Die relative Abweichung zum Literaturwert beträgt hier 1.3%.

Eine quadratische oder kubische Regression der Messwerte bietet sich hier Aufgrund des theoretischen Zusammenhangs der Messwerte zwar an, liefert aber Aufgrund der Forderung positiver Koeffizienten, die aus Formel (9) abzuleiten ist, für diese Koeffizienten den Wert Null, der gleiche Wert mit größerem Fehler für den Achsenabschnitt  $T(0)$  gefunden wird.

### 3.4 Fehlerdiskussion

Obwohl die aus den Messungen errechneten Werte für die Erdbeschleunigung  $g$  nur relativ kleine Abweichungen zu den Literaturwerten aufweisen, so gibt es doch während des Versuchs einige Gegebenheiten, die Ursache dieser Abweichung sein könnte.

Beim Betrachten der Messwerte fällt in einigen Fällen auf, dass Werte, die eigentlich unter den gleichen Gegebenheiten bestimmt wurden, Unterschiede aufweisen. Diese statistischen Abweichungen könnten durch die Messung einer größeren Anzahl von Amplituden im Gesamtergebnis durchaus noch verringert werden. Etwas problematisch dabei wären allerdings Reibungseffekte sowohl an den Pendelachsen, sowie die Luftreibung durch das schwingende Pendel und die so veränderliche Amplitude. Eine Messung über mehr Perioden führt also nur bedingt zu einer Verbesserung des Ergebnisses.

Eine offensichtliche Fehlerquelle, die Bestimmung des Achsenabstands  $a$ , hat bei dieser Messung eine direkte Auswirkung auf das Gesamtergebnis. Fehler in dieser Messung führen schnell zu großen Abweichungen im Endergebnis. Eine genauere Bestimmung durch beispielsweise mehrmalige Messung wäre hier angebracht. Ähnliches gilt für die Bestimmung des Abstands  $x$  des mittleren Gewichts zur Achse. Gerade für die Auswertung des zweiten Versuchsteils ist die exakte Bestimmung des Abstands bei dem die Periode um beide Achsen identisch ist wichtig. Ein Fehler hier führt zu abweichenden Ergebnissen. Die Abweichung aus Ergebnis (14) ist am wahrscheinlichsten durch eine falsche Wahl von  $x$  zu erklären.

Zum Fehler der Messungen aus Kapitel 3.2: Zum Zeitpunkt der Versuchsdurchführung war diese Methode zur Berechnung der Erdbeschleunigung nicht bekannt, so dass die relativ einfache Messung des Schwerpunkts des Pendels nicht gemacht wurde. Die Näherung einer masselosen Pendelstange ist hier eindeutig für den Fehler verantwortlich.

## 4 Fragen

Antworten auf die Fragen aus der Versuchsbeschreibung

a) Ist die Erdbeschleunigung an den Polen oder am Äquator größer?

Die Erdbeschleunigung ist am Äquator geringer als an den Polen. Grund hierfür ist die Erdrotation.

Auf eine Masse am Äquator wirkt neben der Gewichtskraft auch eine Zentripetalkraft die der Gravitationskraft entgegenwirkt. Eine Masse die sich an den Polen, also nahe der Rotationsachse der Erde befindet, erfährt diese Zentripetalkraft nicht. Folglich ist die Gewichtskraft und damit auch die Erdbeschleunigung am Äquator vermindert.

Zusätzlich bewirkt die Erdrotation, dass der Abstand zum Erdmittelpunkt am Äquator größer ist, als an den Polen. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ist die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern im idealisierten Modell von den Massen und dem reziproken des Abstands der Massen abhängig. Mit einem geringeren Abstand zum Massenmittelpunkt der Erde an den Polen ist so die Gravitationskraft auf eine Masse

an den Polen größer als am Äquator. Dies führt zu einer weiteren Verminderung der Gewichtskraft und somit auch der Erdbeschleunigung am Äquator.

- b) Herleitung der Gleichung für große Schwingungsamplituden.  
siehe 2.4

## 5 Verzeichnisse

### 5.1 Literaturverzeichnis

[WPEnz] Verschiedene *Wikipedia - Die freie Enzyklopädie* <http://de.wikipedia.org>

[APScript] B.RUNGE *Versuchsanleitung zum Reversionspendel*

[APFeh] B.RUNGE *Skript zur Fehlerrechnung*

## A Zur Rechnung aus 3.1

Das kommentierte Maple-Worksheet zur Berechnung der Werte und Fehler aus Kapitel 3.1 der Auswertung.

Definition der Funktionen  $T$  und  $T'$

```
> restart;  
> T[1]:=sqrt(a[1]/(b[1]+x)+c[1]*(b[1]+x));  
T1 :=  $\sqrt{\frac{a_1}{b_1+x} + c_1(b_1+x)}$   
> T[2]:=sqrt(a[2]/(b[2]+x)+c[2]*(b[2]+x));  
T2 :=  $\sqrt{\frac{a_2}{b_2+x} + c_2(b_2+x)}$ 
```

Bestimmung der Punkte an denen  $T = T'$  mit unterdrückter Ausgabe

```
> k:=solve(T[1]=T[2],x):
```

Eingabe der Werte der Regression

```
> vals:={a[1]=112.1,a[2]=236.5,b[1]=23.49,b[2]=77.19,c[1]=0.02653,c[2]=0.01525};  
> err[1]:=3.5:  
> err[2]:=5.5:  
> err[3]:=1.5:  
> err[4]:=2.5:  
> err[5]:=0.005:  
> err[6]:=0.0004:
```

```
vals := {a1 = 112.1, a2 = 236.5, b1 = 23.49, b2 = 77.19, c1 = 0.02653, c2 = 0.01525}
```

Den dritten Wert der Liste verwenden.

```
> evalf(abs(eval(k[3],vals)));  
14.01516534
```

Berechnung der Periodendauer

```
> T:=eval(T[1],x=k[3]):  
> abs(evalf(eval(T,vals)));
```

1.995979376

Berechnung der einzelnen Fehler durch Fehlerfortpflanzung

```
> Delta[1]:=abs(evalf(eval(diff(T,a[1]),vals))*err[1]);
> Delta[2]:=abs(evalf(eval(diff(T,a[2]),vals))*err[2]);
> Delta[3]:=abs(evalf(eval(diff(T,b[1]),vals))*err[3]);
> Delta[4]:=abs(evalf(eval(diff(T,b[2]),vals))*err[4]);
> Delta[5]:=abs(evalf(eval(diff(T,c[1]),vals))*err[5]);
> Delta[6]:=abs(evalf(eval(diff(T,c[2]),vals))*err[6]);
```

$\Delta_1 := 0.007706703512$

$\Delta_2 := 0.02008633293$

$\Delta_3 := 0.006585630056$

$\Delta_4 := 0.01097605009$

$\Delta_5 := 0.01548648343$

$\Delta_6 := 0.01215169417$

Gesamtfehler als euklidische Norm der einzelnen Fehler

```
> DeltaT:=sqrt(sum(Delta[i]^2,i=1..6));
```

$DeltaT := 0.03184639837$

Aus den Werten die Erdbeschleunigung, den absoluten und relativen Fehler der Erdbeschleunigung berechnen.

```
> l:=1:d1:=0.01:
```

```
> g:=evalf(2*Pi/abs(evalf(eval(T,vals))))^2*l;
```

```
> dg:=evalf(sqrt((eval(diff((2*Pi/t)^2*l,t),t=abs(evalf(eval(T,vals))))*DeltaT)^2
+((2*Pi/abs(evalf(eval(T,vals))))^2*d1)^2));
```

$g := 9.909406345$

$dg := 0.3313778838$

```
> dg/g;
```

0.03344074027