

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Physikalische Grundlagen	2
2.1	Dynamik am Pohlschen Rad	2
2.2	Herleitung der Schwingungsgleichung	3
2.3	Lösung der Schwingungsgleichung	3
2.3.1	Ungedämpfte harmonische Schwingung	3
2.3.2	Gedämpfte harmonische Schwingung	4
2.3.3	Erzwungene Schwingungen	6
3	Versuch und Auswertung	8
3.1	Freie Schwingungen	9
3.2	Erzwungene Schwingungen	10
3.3	Fehlerdiskussion	11
4	Fragen	12
5	Verzeichnisse	14
5.1	Literaturverzeichnis	14
Anhang A: Messprotokoll aus dem Praktikum		

1 Einleitung

In der Natur und der Technik lassen sich viele Systeme als Oszillatoren beschreiben. Oszillatoren sind aufgrund ihrer Beschaffenheit in der Lage zu schwingen. Die Schwingungen dieser Oszillatoren lassen sich im Idealfall durch die relativ einfache harmonische Schwingung approximieren. In diesem Versuch sollen am Beispiel eines einfachen Resonators, des Pohlschen Rades, verschiedene Arten einer harmonischen Schwingung untersucht werden. Die Ergebnisse lassen sich dann auf andere Resonatoren übertragen.

2 Physikalische Grundlagen

Im Folgenden sollen die zur Versuchsbeschreibung nötigen physikalischen und mathematischen Grundlagen genannt und erläutert werden.

2.1 Dynamik am Pohlschen Rad

Für die Beschreibungen von Drehbewegungen ist eine Auswertung mit Längen und Massen schwierig und führt schnell zu komplizierten Zusammenhängen. Eine Beschreibung mit Drehwinkeln und Trägheitsmomenten bietet sich hier zur Vereinfachung an. Analog zur geradlinigen Dynamik wird hier die Winkelgeschwindigkeit bzw. Winkelbeschleunigung durch die erste bzw. zweite Ableitung des Drehwinkels nach der Zeit beschrieben. An die Stelle einer Kraft tritt hier ein Drehmoment. Das Drehmoment M ergibt sich aus der Winkelbeschleunigung α und dem Trägheitsmoment Θ als

$$M = \Theta \cdot \alpha = \Theta \cdot \ddot{\varphi} \quad (1)$$

Im Experiment wird ein Pohlsches Rad als Oszillator verwendet. Dieses ist mit einer Achse durch den Schwerpunkt drehbar gelagert und besitzt ein unbestimmtes Trägheitsmoment für die Rotation um diese Achse. Eine Torsionsfeder bewirkt ein proportional zur Auslenkung rückstellendes Drehmoment. Sie ist damit das Analogon einer Feder und wird ähnlich wie diese durch eine Winkelrichtgröße \tilde{D} charakterisiert. Für das rückstellende Drehmoment M_F gilt hierbei

$$M_F = -D \cdot \varphi \quad (2)$$

Ebenfalls analog zur linearen Dynamik lassen sich bei der Drehbewegung verschiedene Dämpfungen unterscheiden. Je nachdem welche Reibungskräfte und damit auch „Reibungsdrehmomente“ auf den betrachteten Körper wirken, lassen sich verschiedene Fälle unterscheiden. Bei einer konstanten Reibung ist das auftretende Drehmoment stets der Bewegung entgegen gerichtet, vom Betrag her aber nicht durch die Winkelgeschwindigkeit bestimmt. Eine linear von der Geschwindigkeit abhängige Reibung führt zu einem mit der Winkelgeschwindigkeit proportionalen Drehmoment. Es ist also

$$M_R = -\tilde{k} \cdot \dot{\varphi} \quad (3)$$

Eine lineare Dämpfung wird beim Pohlschen Rad durch eine Wirbelstrombremse erreicht. Dabei wird der leitende Rotationskörper des Rades in das Magnetfeld einer Spule gebracht. Aufgrund einer Bewegung wird nach dem Induktionsgesetz nun eine Spannung in den Kupferreifen induziert die zu Wirbelströmen im leitenden Material führt. Diese erzeugen um das Material ein Magnetfeld das dem äußeren nach der Lenzschen Regel entgegenwirkt.

Da der elektrische Widerstand des Rades endlich ist, wird die dem System so entzogene Bewegungsenergie teilweise in Wärme umgesetzt. Weil die induzierten Spannungen linear von der Winkelgeschwindigkeit des Rades abhängen, handelt es sich hierbei um eine lineare Reibung.

2.2 Herleitung der Schwingungsgleichung

Die Schwingungsgleichung in der allgemeinsten Form, also auch mit der Anregung durch ein äußeres Drehmoment lässt sich aus der Drehmomentsgleichung ableiten. Dabei ist das Drehmoment auf das Pohlsche Rad durch das rückstellende Drehmoment der Torsionsfeder, sowie das Drehmoment durch die lineare Reibung und das von außen angelegte Drehmoment $M_E(t)$ gegeben.

$$M = M_F + M_R + M_E \quad (4)$$

Durch Einsetzen der einzelnen oben aufgeführten Drehmomente und Teilen durch das Trägheitsmoment Θ erhält man hieraus die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{\tilde{k}}{\Theta}\dot{\varphi} + \frac{\tilde{D}}{\Theta}\varphi = \frac{M_E}{\Theta} \quad (5)$$

2.3 Lösung der Schwingungsgleichung

Je nachdem welche Eigenschaften das betrachtete System, in diesem Fall das Pohlsche Rad hat, kann die Schwingungsgleichung unterschiedlich gelöst werden. Man unterscheidet hier mehrere Fälle. Bei zu vernachlässigbarer Dämpfung und keiner äußeren Drehmomenteinwirkung vereinfacht sich die Schwingungsgleichung zu der einer ungedämpften harmonischen Schwingung. Tritt nur eine Dämpfung und keine Anregung auf, so ergeben sich andere Lösungen für die gedämpfte harmonische Schwingung. Der letzte Fall betrachtet den angeregten Fall, bei dem streng genommen auch wieder zwischen gedämpfter und ungedämpfter Schwingung unterschieden werden kann.

2.3.1 Ungedämpfte harmonische Schwingung

Wird das System nicht gedämpft und gibt es kein Äußeres Drehmoment, so vereinfacht sich die Schwingungsgleichung (5) zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{\tilde{D}}{\Theta}\varphi = 0 \quad (6)$$

Diese lineare homogene Differentialgleichung kann durch den allgemeinen Ansatz

$$\varphi = Ae^{\lambda t}$$

wobei hier der Parameter λ komplexwertig ist und sich ergibt als

$$\lambda = i\sqrt{\frac{\tilde{D}}{\Theta}} =: i\omega_0$$

Aufgrund dieser Lösung definiert man die Eigenfrequenz ω_0 des Resonators als

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{\Theta}} \quad (7)$$

Die tatsächliche Lösung ergibt sich dann aus dem Ansatz

$$\varphi = A \cdot e^{i\omega t}$$

und den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 \quad (8)$$

Hiermit kann der Koeffizient A bestimmt werden als

$$A = \varphi_0 + i \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}$$

2.3.2 Gedämpfte harmonische Schwingung

Betrachtet man nun den Fall eines Oszillators mit linearer Dämpfung aber ohne äußeres Drehmoment, so ergibt sich aus der Schwingungsgleichung (5) und der Definition der Eigenfrequenz ω_0 aus Gleichung (7)

$$\ddot{\varphi} + \frac{\tilde{k}}{\Theta} \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (9)$$

Ein zu oben analoger Ansatz von

$$\varphi = A \cdot e^{\lambda t}$$

liefert für den Koeffizienten λ

$$\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{k}}{\Theta} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\tilde{k}^2}{\Theta^2} - \omega_0^2} \quad (10)$$

wobei nur eine Lösung der quadratischen Gleichung für λ berücksichtigt wurde. Zur einfacheren Darstellung und weiterer Rechnung definiert man nun eine Dämpfungskonstante β durch

$$\beta := \frac{1}{2} \frac{\tilde{k}}{\Theta} \quad (11)$$

Somit ergibt sich der Koeffizient λ als

$$\lambda = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Für die gedämpfte Schwingung müssen aufgrund der Wurzel im Koeffizienten λ verschiedene Fälle unterschieden werden. Die entstehenden Schwingungen werden in Schaubild (1) graphisch verdeutlicht.

Der Schwingfall Ist die Dämpfung kleiner als die Eigenfrequenz des Oszillators, so erhält der Koeffizient der Exponentialfunktion λ sowohl einen Realteil als auch einen Imaginärteil. Es gilt dann

$$\lambda = -\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Der oben gemachte Ansatz lautet dann

$$\varphi = A \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}$$

wobei das System noch schwingfähig ist. Deshalb definiert man die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung als

$$\omega_g = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (12)$$

Mit den Anfangsbedingungen aus den Gleichungen (8) kann so für $\beta < \omega_0$ für den Parameter A bestimmt werden

$$A = \varphi_0 + i \frac{\beta\varphi_0 + \dot{\varphi}}{\omega_g}$$

Die Lösung von Gleichung (9) für eine $\beta < \omega_0$ liefert also eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_g , deren Amplitude mit β exponentiell abnimmt. Für $\beta = 0$ folgt der im vorherigen Abschnitt betrachtete Fall einer ungedämpften Schwingung.

Man definiert alternativ zur Dämpfung das logarithmische Dekrement Λ als den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Amplituten. Mit der Periodendauer von $T = 2\pi/\omega_g$ gilt:

$$\Lambda = \ln \left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} \right) = \ln \left(\frac{A \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{i\omega_g t}}{A \cdot e^{-\beta(t+T)} \cdot e^{i\omega_g(t+T)}} \right) = \beta \cdot T = \beta \frac{2\pi}{\omega_g} \quad (13)$$

Der Aperiodische Grenzfall Der aperiodische Grenzfall tritt dann auf, wenn die Dämpfungskonstante genau der Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung entspricht. Betrachtet man den Koeffizienten der Exponentialfunktion λ für $\beta = \omega_0$, so fällt auf, dass dieser keinen Imaginäranteil aufweist und so kein schwingfähiges System mehr darstellt. Ob die Winkelfunktion vor dem Stillstand noch einen Nulldurchgang aufweist, hängt von den Anfangsbedingungen ab. Für die Bedingungen aus Gleichung (9) ergibt für den Drehwinkel

$$\varphi = [\varphi_0 + (\dot{\varphi}_0 + \beta\varphi_0)t] \cdot e^{-\beta t}$$

Der aperiodische Grenzfall nimmt als Übergang von einem periodisch schwingfähigen System zu einem stark gedämpften System, in dem keine Schwingung mehr möglich ist, eine Sonderstellung ein. Je nach Anfangsbedingungen kann hier die Winkelfunktion φ vor dem zur Ruhe kommen noch einen Nulldurchgang aufweisen. Auch für viele technische Anwendungen ist der aperiodische Grenzfall von Bedeutung, da hier das Abklingen der Auslenkung im Vergleich zu den anderen Fällen sehr rasch geschieht.

Der Kriechfall Der Kriechfall tritt auf, wenn die Dämpfung größer als die Eigenfrequenz des Resonators ist. Hierbei ist das System nicht mehr schwingfähig. Zur Lösung der Differentialgleichung muss hier die in Gleichung (10) vernachlässigte Lösung für den

Koeffizienten λ herangezogen werden. So erhält man zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung, die auf den Ansatz

$$\varphi = A \cdot e^{-\beta t + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + B \cdot e^{-\beta t - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}$$

führen. Zur weiteren Vereinfachung dient die Einführung einer weiteren Variable

$$\Gamma := \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Durch die Anfangsbedingungen ergeben sich nun die Komponenten zu

$$A = \frac{(\Gamma + \beta)\varphi_0 + \dot{\varphi}_0}{2\Gamma} \quad B = \frac{(\Gamma - \beta)\varphi_0 - \dot{\varphi}_0}{2\Gamma}$$

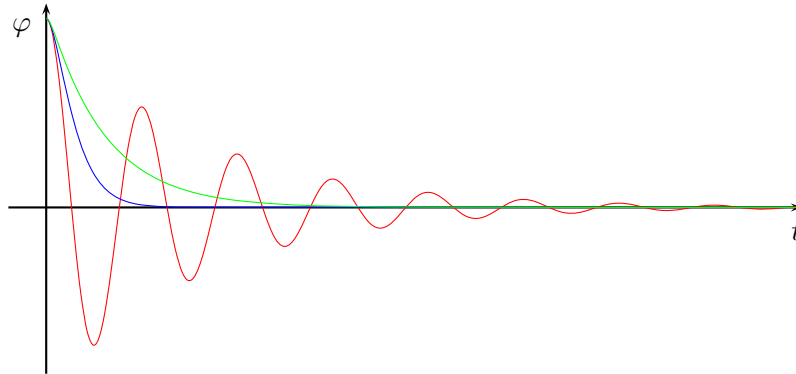


Abbildung 1: Vergleich der verschiedenen Schwingungsformen bei unterschiedlicher Dämpfung eines Systems. Beim Schwingfall (rot) ist die Dämpfung deutlich geringer als die Eigenfrequenz des Resonators. Bei größerer Dämpfung, also dem Kriechfall (grün), geht die Auslenkung gegen Null. Die Ruhelage wird beim aperiodischen Grenzfall (blau) am schnellsten erreicht.

2.3.3 Erzwungene Schwingungen

Bei einer erzwungenen Schwingung wirkt auf das System von außen ein zusätzliches Drehmoment. Die Schwingungsgleichung ist in diesem Fall durch Gleichung (5) gegeben, wobei das äußere Drehmoment periodisch auf das System wirkt.

$$M_E = M_0 \cdot e^{i\omega t}$$

Hierbei stellt ω die Kreisfrequenz, sowie M_0 die Amplitude des anregenden Drehmoments dar. Mit einer Anregung von außen wird die Schwingungsgleichung zu einer inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei die Lösung des dazugehörigen homogenen Systems bereits bekannt ist. Ein allgemeiner Ansatz für die partikuläre Lösung

$$\varphi_p = C \cdot e^{\kappa t}$$

liefert eingesetzt

$$\kappa^2 \cdot C e^{\kappa t} + 2\beta \cdot \kappa \cdot C \cdot e^{\kappa t} + \omega_g^2 \cdot C \cdot e^{\kappa t} = \frac{M_0}{\Theta} e^{i\omega t}$$

Setzt man $\kappa = i\omega$ lässt sich hiermit auch der komplexe Koeffizient C berechnen. Es ist

$$C = \frac{M_0/\Theta}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}$$

Schreibt man den Koeffizienten C in der Exponentialdarstellung einer komplexen Zahl

$$C = D \cdot e^{i\alpha}$$

so ergibt sich für das Modul D und damit die Amplitude der Schwingung

$$D = |C| = \frac{M_0/\Theta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (14)$$

und für die Phase von C und damit die Phasendifferenz zwischen Erreger und Oszillator für

$$\alpha = \arctan \left\{ \frac{\Im(C)}{\Re(C)} \right\} = \arctan \left\{ -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\} \quad (15)$$

Die Lösung der inhomogenen Schwingungsgleichung ist also durch die lineare Kombination der partikulären Lösung und der Lösung der homogenen Schwingungsgleichung gegeben. Da wir aus den Betrachtungen der homogenen Schwingungsgleichungen wissen, dass im gedämpften Fall die Schwingungsamplitude exponentiell abfällt, wird nach einem Einschwingvorgang, dessen Länge von der Dämpfung des Systems abhängt, nur noch eine Schwingung mit der Frequenz der anregenden Frequenz ausgeführt. Diese weist gegenüber der erregenden Schwingung einen Phasenversatz von α auf und hat die Amplitude D .

Wie in Abbildung (2) zu erkennen ist gibt es bei einer bestimmten Frequenz des anregenden Drehmoments ein Maximum der Schwingungsamplitude. Die Frequenz, bei der die Amplitude der resultierenden Schwingung maximal wird ist die Resonanzfrequenz ω_{res} . Der Wert von ω_{res} kann durch Ableiten und Nullsetzen der Amplitude C geschehen. Bei ω_{res} muss demnach gelten

$$\frac{d}{d\omega} C = \frac{M_0/\Theta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}^3} (2\omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2)) \stackrel{!}{=} 0$$

Damit diese Bedingung erfüllt ist, muss der letzte Term Null werden, also

$$2\omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2) \stackrel{!}{=} 0$$

Da die Lösung $\omega = 0$ als nicht zu betrachtende Nullstelle ausgeschlossen werden kann, ergibt sich für die Resonanzfrequenz

$$2\beta^2 = \omega_0^2 - \omega_{res}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Ebenfalls am Schaubild aus (2), aber auch an Gleichung (14) lässt sich das Grenzverhalten für die Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz des anregenden Drehmoments ablesen. Für $\omega \rightarrow 0$ entspricht die Schwingungsamplitude gerade der Amplitude der anregenden Schwingung. Hierbei ist die Phasendifferenz α zwischen Erreger und Resonator gerade Null. Für $\omega \rightarrow \infty$ wird die vom Resonator ausgeführte Schwingungsamplitude Null. Die

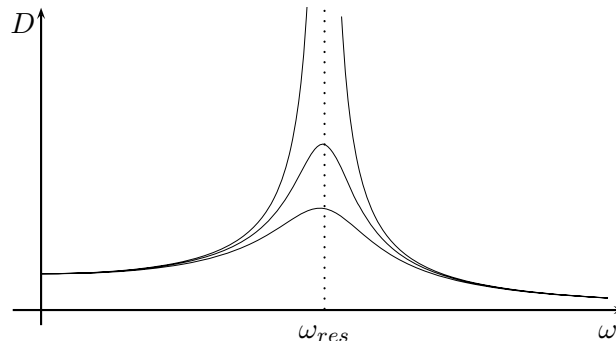


Abbildung 2: Die Amplitude D einer erzwungenen Schwingung für verschiedene Dämpfungen β in Abhängigkeit der erregenden Frequenz ω . Die Kurve mit der geringsten maximalen Amplitude

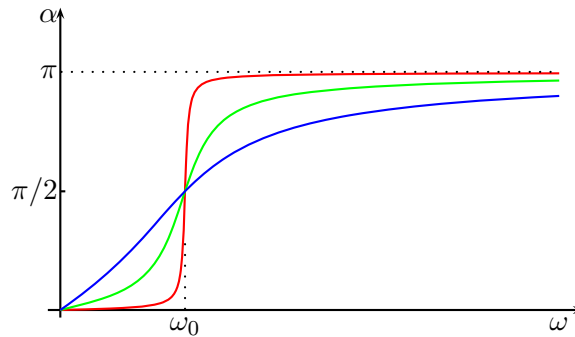


Abbildung 3: Die Phasendifferenz α einer erzwungenen Schwingung für verschiedene Dämpfungen β in Abhängigkeit der erregenden Frequenz ω . Dabei entsteht die rote Kurve durch die kleinste Dämpfung.

Phasendifferenz zwischen Erregung und Resonator erreicht hier ihr Maximum von π , Resonator und Erreger schwingen gegenphasig.

Eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ wird nicht bei der Resonanzfrequenz des Systems erreicht, sondern vielmehr bei der Eigenfrequenz des Systems. Für größere Dämpfungen wird der Verlauf der Phasendifferenz zwischen Erreger und Resonator flacher, was im Schaubild (3) graphisch veranschaulicht wird.

3 Versuch und Auswertung

Im Versuch wurden zwei unterschiedliche Messungen am Pohlschen Rad vorgenommen. Dabei wurden im ersten Teil freie gedämpfte Schwingungen untersucht und die charakteristischen Größen gemessen. Im zweite Teil wurden erzwungene Schwingungen am Pohlschen Rad untersucht.

3.1 Freie Schwingungen

Zur Messung der freien Schwingungen am Pohlschen Rad wurden für verschiedene Dämpfungen, die durch unterschiedliche Ströme der Wirbelstrombremse erreicht werden, gemessen. Hierbei wurden einerseits die Periodendauern der gedämpften Schwingungen über mehrere Perioden gemessen, sowie die maximale Winkelauslenkung für die einzelnen Perioden am Messgerät abgelesen. Alle Messwerte sind im Messprotokoll verzeichnet.

Aus den Messungen der Periodendauern für die einzelnen Dämpfungen lassen sich die Fre-

I/A	\bar{T}/s	δ_T/s	f/Hz	δ_f/Hz
0.0	1.65	0.04	0.61	0.01
0.2	1.65	0.04	0.61	0.01
0.3	1.70	0.07	0.59	0.02
0.4	1.67	0.06	0.60	0.02
0.6	1.69	0.10	0.59	0.03
1.0	1.82	0.22	0.55	0.07

Tabelle 1: *Errechnete Periodendauer T und Frequenzen f für die harmonische gedämpfte Schwingung des Pohlschen Rades für den Dämpfungsstrom I*

quenzen bzw. Kreisfrequenzen der Schwingungen errechnen. Tabelle (1) stellt die aus den Periodendauermessungen errechneten Frequenzen bzw Kreisfrequenzen für die einzelnen Dämpfungen dar. Der Fehler entsteht hierbei durch eine angenommene Messunsicherheit von $\delta_T = 0.5s$ für den einzelnen Messwert.

Die Periodendauer aus Tabelle (1) ist die Grundlage für das Diagramm aus (4), das die Amplituden der einzelnen Perioden logarithmisch über der der Zeit darstellt. Da jeweils die positiven und negativen Auslenkungen bestimmt wurden ist die Zeitdifferenz zwischen den einzelnen Messwerten jeweils $T/2$.

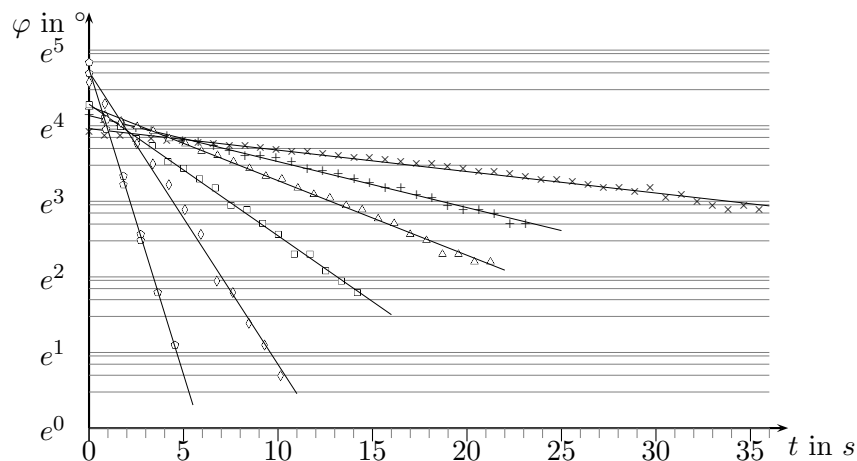


Abbildung 4: *Die gemessenen Amplituden der gedämpften Schwingungen. Die Geraden entstehen durch lineare Ausgleichrechnung. Die Werte sind dem Messprotokoll zu entnehmen.*

Die Steigungen der Ausgleichsgeraden in der logarithmischen Darstellung ergibt gerade

die Dämpfungskonstante β des Systems. Der angegebene Fehler entspricht dem Fehler der linearen Regression. Das logarithmische Dekrement Λ errechnet sich nach Formel (13). So ergibt sich für die Bremsströme I

$$\begin{aligned}
 I &= 0.0A & \beta &= 0.02(2) \cdot 1/s & \Lambda &= 0.05 \\
 I &= 0.2A & \beta &= 0.06(1) \cdot 1/s & \Lambda &= 0.10 \\
 I &= 0.3A & \beta &= 0.10(1) \cdot 1/s & \Lambda &= 0.17 \\
 I &= 0.4A & \beta &= 0.17(1) \cdot 1/s & \Lambda &= 0.29 \\
 I &= 0.6A & \beta &= 0.39(1) \cdot 1/s & \Lambda &= 0.65 \\
 I &= 1.0A & \beta &= 0.80(1) \cdot 1/s & \Lambda &= 1.47
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

3.2 Erzwungene Schwingungen

Im zweiten Teil des Versuchs werden verschiedene erzwungene Schwingungen am Pohlischen Rad untersucht. Hierzu wird mit einem am Versuchsaufbau angebrachten Elektroschrittmotor, dessen Drehfrequenz beliebig verändert werden kann, der Befestigungspunkt der Torsionsfeder periodisch verändert. Auf den Resonator bewirkt die periodische Änderung der Ruhelage, bei der das Federdrehmoment verschwindet, ein periodisch wirkendes Drehmoment. Das Pohlische Rad wird zu einer Schwingung angeregt.

Im Folgenden wurden für drei verschiedene Dämpfungen, repräsentiert durch unterschiedliche Ströme an der Wirbelstrombremse, nach dem Einschwingvorgang die Amplitude der resultierenden Schwingung und die Phasenverschiebung zwischen Resonator und Erregung für unterschiedliche erregende Frequenzen bestimmt. Die gemessenen Werte sind dem Messprotokoll zu entnehmen. Das Schaubild aus (5) zeigt die Amplitude des Resonators in Abhängigkeit der Erregerfrequenz.

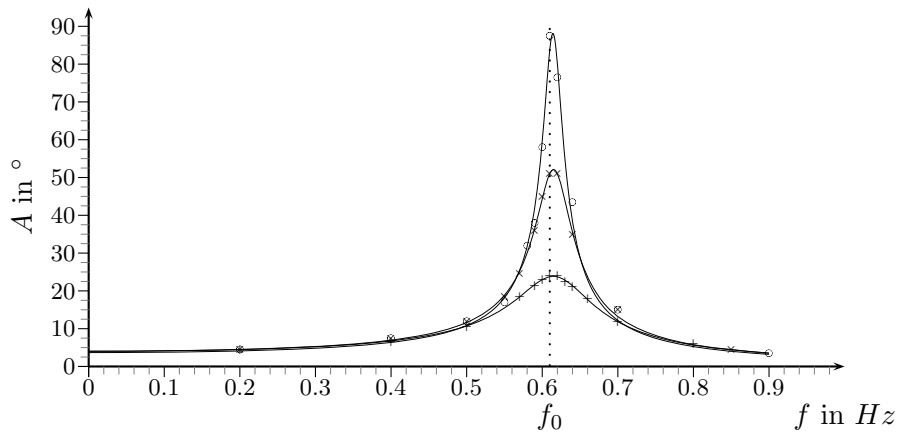


Abbildung 5: Graphische Darstellung der Messergebnisse zu den erzwungenen Schwingungen. Dabei ist die Amplitude A des Resonators in Abhängigkeit der Erregerfrequenz f dargestellt. Die unterschiedlichen Kurven ergeben sich für verschiedene Dämpfungen (0.3A, 0.4A bzw. 0.6A der Wirbelstrombremse)

Neben der Messung der Amplitude wurden bei den erzwungen Schwingungen ebenfalls die Phasendifferenz zwischen Erreger und Resonator gemessen. Die gemessenen Werte können ebenfalls dem Messprotokoll entnommen werden und sind die Grundlage für das Schaubild

aus (6).

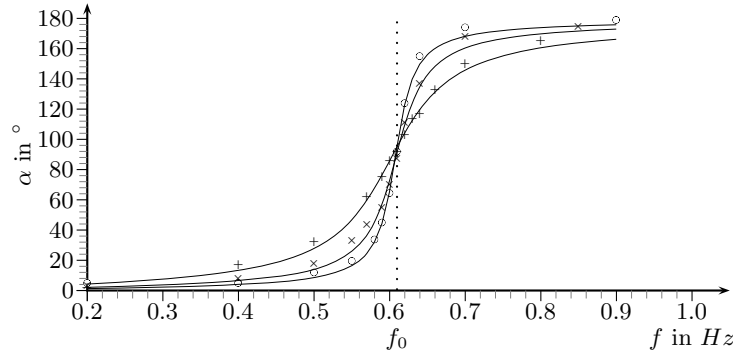


Abbildung 6: Graphische Darstellung der Messergebnisse zu den erzwungenen Schwingungen. Dabei ist die Phasendifferenz α zwischen Erreger und Resonator in Abhängigkeit der Erregerfrequenz f dargestellt. Die unterschiedlichen Kurven ergeben sich für verschiedene Dämpfungen (0.3A, 0.4A bzw. 0.6A der Wirbelstrombremse)

Aus den Resonanzkurven des Schaubilds (5) kann die Halbwertsbreite der Resonatorcurve $\Delta\omega$ bestimmt werden. Daraus soll nun unter Verwendung von Formel (17) die Dämpfungskonstante β und das logarithmische Dekrement Λ für die gemessenen gedämpften Schwingungen bestimmt werden. Für einen Dämpfungsstrom von $I = 0.3A$ ergibt sich die Halbwertsbreite und die daraus errechneten Werte als

$$\Delta f = 0.025Hz \Rightarrow \Delta\omega = 0.16 \cdot 1/s \Rightarrow \beta \approx 0.08 \cdot 1/s \Rightarrow \Lambda \approx 0.13$$

Im Falle des Dämpfungsstroms von $I = 0.4A$ ergibt sich

$$\Delta f = 0.047Hz \Rightarrow \Delta\omega = 0.30 \cdot 1/s \Rightarrow \beta \approx 0.15 \cdot 1/s \Rightarrow \Lambda \approx 0.25$$

Für den größten untersuchten Dämpfungsstrom von $I = 0.6$ ist nach der approximierten Funktion.

$$\Delta f = 0.105Hz \Rightarrow \Delta\omega = 0.66 \cdot 1/s \Rightarrow \beta \approx 0.33 \cdot 1/s \Rightarrow \Lambda \approx 0.54$$

Diese Werte entsprechen mit einem Fehler, der aufgrund der ungenauen Messungen an der approximierten Funktion entsteht, den Werten aus (16).

3.3 Fehlerdiskussion

Obgleich die Fehler für die einzelnen Messungen geschätzt werden können erlaubt die Art der Auswertung nur eine eingeschränkte Fehlerrechnung, da die Grundlage der errechneten Werte jeweils die approximierten Graphen angepasst auf die Messwerte ergaben. Speziell im zweiten Teil der Auswertung kann daher ein Fehler nur geschätzt werden, und ist deshalb nicht explizit angegeben. Eine qualitative Einschätzung der Messwerte, bei denen kein Vergleich zwischen den beiden Versuchsteilen möglich ist, ist demnach zu bewerkstelligen.

Bei der Messung der freien Schwingungen fällt auf, dass die Schwingung ohne angelegten Dämpfungsstrom durch äußere Einflüsse, wie beispielsweise Reibung an der Drehachse oder Restmagnetisierung der Wirbelstrombremse, auch gedämpft wird. Diese Fehlerquelle

ist demnach in allen weiteren Messungen ebenfalls zu berücksichtigen. Weitere Fehlerquellen bei den Messungen am Pohlschen Rad stellen die genutzten Geräte zur Messung, sowie die Zeitmessung von Hand dar.

Bei der Bestimmung der Dämpfung im zweiten Teil der Auswertung ist, wie schon erläutert, eine quantitative Fehlerrechnung nur schwer zu bewerkstelligen. Hier wirkt sich ein Fehler in der Bestimmung der Frequenzen der Halbwertsbreite stark in das Ergebnis aus, so dass selbst eine kleine Abweichung einen Fehler von bis zu 100% bedeuten kann. Zur Bestimmung der Dämpfung des Systems liefert die Messung am freien System genauere Ergebnisse. Allerdings liefern beide Methoden nahezu identische Ergebnisse, wobei die Werte der Dämpfung bestimmt aus den erzwungen Schwingungen stets kleiner als die Werte errechnet durch die freien Schwingungen sind. Dieses Verhalten lässt auf einen systematischen Fehler schließen, wie nicht berücksichtigte Reibung oder ein Fehler in den Messgeräten.

Im Rahmen der Messgenauigkeit sind die gemessenen und errechneten Werte mit der Theorie vereinbar.

4 Fragen

- 1) Herleitung der Formel für die Resonanzfrequenz

siehe Abschnitt 2.3.3

- 2) Frequenz der maximalen Rotationsenergie

Für die Rotationsenergie eines Pohlschen Rades gilt

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2$$

Die Winkelgeschwindigkeit nach dem Einschwingvorgang ist mit gleicher Notation wie in Abschnitt 2.3.3 gegeben durch

$$\dot{\varphi} = i\omega C e^{i\omega t}$$

Somit gilt für die Energie des Schwingenden Systems

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 (iC)^2 e^{2i\omega t}$$

oder mit der exponentiellen Darstellung der komplexen Amplitude

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 |iC|^2 e^{2i\omega t - i\alpha}$$

Die Rotationsenergie wird maximal, wenn

$$\omega^2 |iC|^2 = \omega^2 \left| \frac{iM_0/\Theta}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega} \right|^2$$

maximal wird. Nun ist aber

$$\omega^2 \left| \frac{iM_0/\Theta}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega} \right|^2 = \frac{\omega^2 M_0^2 / \Theta^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

und da eine Nullstelle der Ableitung für ein Maximum notwendig ist

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega^2 M_0^2 / \Theta^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \right) = \frac{M_0^2 / \Theta^2 \cdot 2\omega(\omega_0^4 - \omega^4)}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)^2}$$

Die Nullstellenbedingung der Ableitung und somit auch die Bedingung für ein Maximum der kinetischen Energie lässt sich nun einfach als $\omega = \omega_0$ ablesen.

Ein Maximum der kinetischen Energie des Systems wird also nicht bei der Resonanzfrequenz, sondern der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems erreicht.

3) Halbwertsbreite und Dämpfungskonstante

Die Amplitude der angeregten Schwingung bei der Resonanzfrequenz ergibt sich als

$$D_{max} = \frac{M_0 / \Theta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{res}^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{res}^2}} = \frac{M_0 / \Theta}{\sqrt{4\beta^2 \omega_0^2 - 4\beta^4}}$$

Für die Amplituden der Halbwertsbreite gilt nun

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{D}{D_{max}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4\beta^2 \omega_0^2 - 4\beta^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

Auflösen nach ω^2 liefert zwei Lösungen für ω^2

$$\omega_{1/2}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \pm 2\sqrt{\beta^2 \omega_0^2 + 4\beta^4}$$

Im Falle einer kleinen Dämpfung ist $\Delta\omega \ll \omega$ und so gilt

$$\omega_{1/2} \approx \omega_{res} \pm \frac{\Delta\omega}{2} \Rightarrow \omega_{1/2}^2 \approx \omega_{res}^2 \pm \Delta\omega \cdot \omega_{res} + \frac{\Delta\omega}{4}$$

Hiermit lässt sich zeigen, dass

$$4\sqrt{\beta^2 \omega_0^2 + 4\beta^4} = \omega_1^2 - \omega_2^2 \approx 2\Delta\omega \cdot \omega_{res} = 2\Delta\omega \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Wiederum unter der Annahme einer kleinen Dämpfung ist $\sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2} \approx \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ so dass sich der Ausdruck weiter zur Behauptung umformen lässt.

$$2\beta \approx \Delta\omega = \frac{\Lambda \cdot \omega_0}{\pi} \quad (17)$$

4) Dispersion und erzwungene gedämpfte Schwingungen

Ein Medium lässt sich nach dem Lorentz-Modell als ein System von schwingenden Dipolen auffassen. Beim Einfall einer elektromagnetischen Welle werden die Resonatoren des Mediums zu Schwingungen angeregt. Jeder schwingende Dipol kann hierbei durch das Modell des Hertz'schen Dipols beschrieben werden. Die Amplitude und die Phase der Dipolschwingungen und damit auch der von den Dipolen emittierten Wellen lassen sich hierbei als das Resultat von erzwungenen Schwingungen auffassen. Hieraus folgt eine von der Frequenz der anregenden Strahlung abhängige Dielektrizität des Mediums und damit die Dispersion.

5) Einschwingvorgänge des Pohlschen Rades

Die Einschwingvorgänge des Pohlschen Rades können während des Versuchs anhand des Schwingverhalten des Resonators bei einer Änderung der anregenden Frequenz beobachtet werden. Dabei lassen sich bei kleiner Dämpfung teilweise Schwebungen beobachten. Kurz nach einer Veränderung der Erregerfrequenz wirkt die Bewegung des Rades aufgrund der Überlagerung der exponentiell abnehmenden Eigenschwingung und erzwungen Schwingung chaotisch. Bei geringer Dämpfung ist der Einschwingvorgang auch nach einigen Minuten nicht beendet, so dass auch hier noch Veränderungen in der Amplitude und dem Phasenunterschied wahrgenommen werden können.

5 Verzeichnisse

5.1 Literaturverzeichnis

[WPEnz] Verschiedene *Wikipedia - Die freie Enzyklopädie* <http://de.wikipedia.org>

[APScript] B.RUNGE *Versuchsanleitung zum Pohlschen Rad*