

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Physikalische Grundlagen	2
2.1	Das einzelne Pendel	2
2.2	Das gekoppelte Pendel	3
2.2.1	Die Bewegungsgleichungen	3
2.2.2	Die Lösung der Bewegungsgleichung	5
2.3	Die Schwingungen	6
2.3.1	Gleichsinnige Schwingung	6
2.3.2	Gegensinnige Schwingung	6
2.4	Die Schwebeschwingung	6
2.5	Der Kopplungsgrad	7
3	Versuchdurchführung	8
3.1	Auswertung	9
3.1.1	Vorbereitende Messungen	9
3.1.2	1. Durchgang	9
3.1.3	2. Durchgang	10
3.1.4	3. Durchgang	12
3.2	Fehlerdiskussion	12
3.2.1	Abweichung in T_-	13
3.2.2	Abweichung in κ	13
4	Fragen und Aufgaben	14
4.1	Gekoppelte Schwingung in der Molekülphysik	14
4.2	Messung hoher Frequenzen	15
5	Verzeichnisse	15
5.1	Abbildungsverzeichnis	15
5.2	Tabellenverzeichnis	15
5.3	Literaturverzeichnis	16

Anhang A: Messprotokoll aus dem Praktikum

1 Einleitung

In vielen Bereichen der Wissenschaft und Technik spielen Schwingungen eine große Rolle. Als Beispiel seien hier die Schwingungen von Saiten eines Musikinstruments oder die eines elektrischen Schwingkreises genannt. Alle Oszillatoren haben die Fähigkeit Energie in verschiedene Formen umzuwandeln. Schwingungen sind also bedingt durch die Umwandlung von Energien eines Systems in verschiedene Zustandsgrößen, wie beispielsweise Geschwindigkeit und Elongation oder Strom und Spannung.

Eine Sonderstellung nimmt hierbei die harmonische Schwingung ein, bei der die zeitlichen Änderungen der Zustandsgrößen sinusförmig und unabhängig von der Größe der Zustände (Amplitude) ist. Ein gutes Beispiel für eine harmonische Schwingung ist eine Federschwingung. Viele in der Natur und Technik vorkommende Schwingungen können als eine harmonischen Schwingung, manchmal mit einer Dämpfung versehen oder durch äußere Kräfte erzwungen, beschrieben werden.

In diesem Versuch soll die Kopplung zweier harmonisch schwingender Oszillatoren untersucht werden.

2 Physikalische Grundlagen

Die quantitative Untersuchung der Kopplung zweier harmonisch schwingender Oszillatoren ist das Ziel dieses Experiments. Hierzu werden zwei Pendel untersucht, die mit einer Feder gekoppelt werden.

2.1 Das einzelne Pendel

Das einzelne Pendel kann in diesem Versuch bei kleiner Winkelauslenkung als physisches Pendel angesehen werden. Die Herleitung der Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels ist über den Ansatz der Kräftegleichung möglich. Je nach Auslenkung des Pendels (φ) wirkt durch die Masse am Ende des Pendels ein rücktreibendes Drehmoment (M). Nun ist:

$$M = |\vec{l} \times \vec{F}_g| = -\sin(\varphi)l \cdot m \cdot g \quad (1)$$

Hierbei ist \vec{l} der Vektor von der Schwingungsachse zum Schwerpunkt des Pendels. Für das Drehmoment gilt nun aber auch:

$$M = I\ddot{\varphi} \quad (2)$$

Durch Gleichsetzen erhält man die Bewegungsgleichung für das Pendel:

$$I\ddot{\varphi} = -\sin(\varphi)l \cdot m \cdot g \quad (3)$$

Für kleine Auslenkungen ($\varphi < 8^\circ$) ergibt sich mit $\varphi \approx \sin(\varphi)$ eine homogene lineare Differentialgleichung, die mit dem allgemeinen Ansatz $\varphi(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$ gelöst werden kann. Die Frequenz dieser Schwingung ergibt sich als $\omega_0 = \sqrt{m \cdot g \cdot r / I}$. I ist in diesem Fall das Trägheitsmoment des Pendels. Die Faktoren a und b lassen sich über die Anfangsbedingungen ($\varphi_0, \dot{\varphi}_0$) der Pendelbewegung bestimmen.

Die Faktoren $|m \cdot l \cdot g|$ werden im folgenden als Winkelrichtgröße \tilde{D} zusammengefasst.

2.2 Das gekoppelte Pendel

Wird nun auf das Pendel eine weitere Kraft ausgeübt, so verändert sich das auf das Pendel wirkende Drehmoment. Wirkt auf das Pendel nun eine von der Auslenkung unabhängige Kraft, so ist das Drehmoment auf das Pendel:

$$M = \underbrace{M(\varphi)}_{\text{Drehmoment durch Auslenkung}} + \underbrace{M_0}_{\text{Drehmoment durch unabhängige Kraft}} \quad (4)$$

Analog dazu gilt dies für Kräfte bzw. Drehmomente, die von der Pendelstellung eines oder beider Pendel abhängen.

Die in diesem Versuch benutzte Kopplung wird als lineare Kopplung bezeichnet, da sie linear von der Stellung der beiden Pendel abhängt. Denkbar wäre auch eine nicht lineare Kopplung, die aber auf andere Phänomene als die Untersuchten führen würde.

Abbildung 1 zeigt den schematischen Versuchsaufbau für dieses Experiment. Das Dreh-

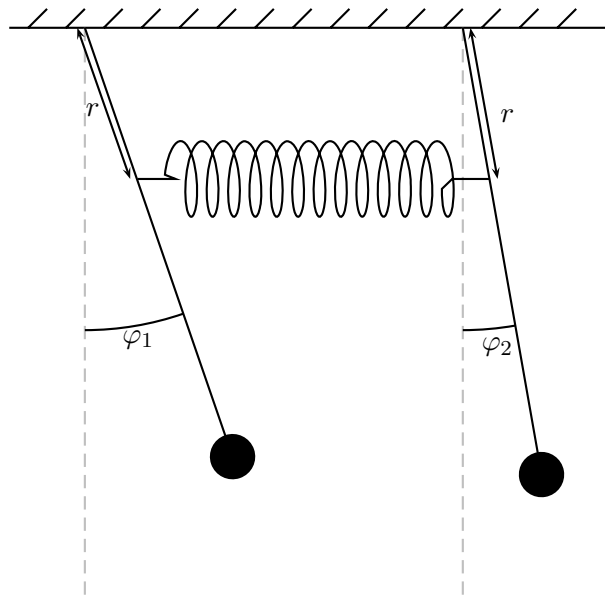


Abbildung 1: Schematische Darstellung der gekoppelten Pendel. (Idee und Vorlage [1])

moment für ein Pendel hängt hierbei nicht nur von der Stellung des einen Pendels ab, sondern wegen der linearen Kopplung durch die Feder, von der Stellung bzw. Auslenkung beider Pendel.

2.2.1 Die Bewegungsgleichungen

Betrachtet man nun die in der Anordnung ausschlaggebenden Drehmomente auf eines der Pendel so ergibt sich für das Drehmoment eines Pendels:

$$M_1 = M_R(\varphi_1) + M_F(\varphi_1, \varphi_2) + M_0 \quad (5)$$

Das rücktreibende Drehmoment (M_R) wird durch Gleichung (1) beschrieben. Unter der Voraussetzung kleiner Auslenkungen gilt hierfür $M_R(\varphi) = -\tilde{D}\varphi$.

M_0 bezeichnet hier das durch die Kopplung auftretende Drehmoment in Ruhelage. Es kann hier als ein konstantes Drehmoment angesehen werden.

$M_F(\varphi_1, \varphi_2)$ ist das durch die Dehnung bzw. Stauchung der Feder hervorgerufene Drehmoment. Die Dehnung der Feder ist durch $\Delta x = \sin(\varphi_2)r - \sin(\varphi_1)r$ gegeben. Hierbei bezeichnet r den Abstand von Drehachse der Pendel und Angriffspunkt der Feder an der Pendelachse (vgl. Abb (1)). Die durch die Feder ausgeübte Kraft wird nach dem Hooke'schen Gesetz mit $F = D\Delta x = D(\sin(\varphi_2)r - \sin(\varphi_1)r)$ beschrieben. Unter der Annahme kleiner Auslenkungen (φ) und Angriffssachsen ($r < l$) kann $\sin(\varphi)$ mit φ genähert werden und davon ausgegangen werden, die durch die Feder ausgeübte Kraft wirke senkrecht auf der Pendelachse. Somit ist das zusätzliche Drehmoment durch die Feder:

$$M_F(\varphi_1, \varphi_2) = D(r\varphi_2 - r\varphi_1)r = Dr^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (6)$$

Somit ergibt sich für das Drehmoment des ersten Pendels

$$M_1 = -\tilde{D}\varphi_1 + Dr^2(\varphi_2 - \varphi_1) + M_0 \quad (7)$$

und analog für das Drehmoment des zweiten Pendels (hier wirken die Federkräfte in umgekehrter Richtung)

$$M_2 = -\tilde{D}\varphi_2 - Dr^2(\varphi_2 - \varphi_1) - M_0 \quad (8)$$

Um das unbekannte konstante Drehmoment der Feder zu eliminieren betrachtet man die Pendel mit Kopplung in Ruhelage. Aufgrund des symmetrischen Versuchsaufbaus gilt in der Ruhelage für die Auslenkung der Pendel $\varphi_1 = -\varphi_2 =: \varphi_0$ und für die Drehmomente der Pendel $M_1 = M_2 = 0$. Setzt man nun diesen Zusammenhang für die Ruhelage in Gleichung (7), so erhält man für das konstante Drehmoment M_0

$$0 = -\tilde{D}\varphi_0 + Dr^2(-\varphi_0 - \varphi_0) + M_0 \quad (9)$$

Und umgeformt nach M_0 :

$$M_0 = (\tilde{D} + Dr^2)\varphi_0 \quad (10)$$

Mit der Substitution $\psi_1 := \varphi_1 - \varphi_0$ bzw. $\psi_2 := \varphi_2 + \varphi_0$ ergibt sich für die Drehmomente einer Pendelbewegung um die Ruhelage des ersten Pendels φ_0 bzw. des zweiten Pendels $-\varphi_0$:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\tilde{D}\varphi_1 + Dr^2(\varphi_2 - \varphi_1) + M_0 \\ &= -\tilde{D}(\psi_1 + \varphi_0) + Dr^2(\psi_2 - \psi_1 - 2\varphi_0) + (\tilde{D} + Dr^2)\varphi_0 \\ &= -\tilde{D}\psi_1 + Dr^2(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned} \quad (11)$$

$$M_2 = -\tilde{D}\varphi_2 - Dr^2(\varphi_2 - \varphi_1) - M_0 \quad (12)$$

Analog zur Bewegungsgleichung eines Pendels kann nun für jedes Pendel eine Bewegungsgleichung aufgestellt werden. Somit gilt für die Pendel:

$$I\ddot{\psi}_1 = M_1 = -\tilde{D}\psi_1 + Dr^2(\psi_2 - \psi_1) \quad (13)$$

$$I\ddot{\psi}_2 = M_2 = -\tilde{D}\psi_2 - Dr^2(\psi_2 - \psi_1) \quad (14)$$

Mit der Substitution von $\omega_{gl}^2 := \frac{\tilde{D}}{I}$ und der des konstanten Faktors $k^2 := \frac{Dr^2}{I}$ ergibt sich für das System der gekoppelten Pendel ein System zweier Differentialgleichungen, dessen Lösung die Bewegung der Pendel beschreibt:

$$\ddot{\psi}_1 + \omega_{gl}^2\psi_1 = k^2(\psi_2 - \psi_1) \quad (15)$$

$$\ddot{\psi}_2 + \omega_{gl}^2\psi_2 = -k^2(\psi_2 - \psi_1) \quad (16)$$

2.2.2 Die Lösung der Bewegungsgleichung

Zum Lösen der Bewegungsgleichung soll hier eine andere Methode als die lineare Kombination der Differentialgleichungen verwendet werden. Dieser Lösungsansatz liefert aber äquivalente Ergebnisse.

$$\text{Aus Gl.(15)} \quad \psi_2 = \frac{\ddot{\psi}_1 + (\omega_{gl}^2 + k^2)\psi_1}{k^2} \quad (17)$$

$$\Rightarrow \ddot{\psi}_2 = \frac{\psi_1^{(4)} + (\omega_{gl}^2 + k^2)\ddot{\psi}_1}{k^2} \quad (18)$$

Setzt man nun die Werte von (17) und (18) in (16) so ist:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1^{(4)} + (\omega_{gl}^2 + k^2)\ddot{\psi}_1}{k^2} + \frac{\omega_{gl}^2\ddot{\psi}_1 + \omega_{gl}^2(\omega_{gl}^2 + k^2)\psi_1}{k^2} &= -\ddot{\psi}_1 - (\omega_{gl}^2 + k^2)\psi_1 + k^2\psi_1 \\ &= -\ddot{\psi}_1 - \omega_{gl}^2\psi_1 \end{aligned} \quad (19)$$

Mit allen Faktoren auf einer Seite:

$$\psi_1^{(4)} + 2(\omega_{gl}^2 + k^2)\ddot{\psi}_1 + \omega_{gl}^2(\omega_{gl}^2 + 2k^2)\psi_1 = 0 \quad (20)$$

Mit der Substitution von $\omega_{gl}^2 + 2k^2 = \omega_{geg}^2$:

$$\psi_1^{(4)} + (\omega_{gl}^2 + \omega_{geg}^2)\ddot{\psi}_1 + \omega_{gl}^2\omega_{geg}^2\psi_1 = 0 \quad (21)$$

Mit dem Ansatz

$$\psi_1 = Ae^{i\theta t} \quad \ddot{\psi}_1 = -A\theta^2 e^{i\theta t} \quad \psi_1^{(4)} = A\theta^4 e^{i\theta t} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \theta^4 + (\omega_{gl}^2 + \omega_{geg}^2)\theta^2 + \omega_{gl}^2\omega_{geg}^2 = 0 \quad (23)$$

Für θ ergeben sich so also vier unterschiedliche Lösungen.

$$\theta_1 = \omega_{geg} \quad \theta_2 = -\omega_{geg} \quad \theta_3 = \omega_{gl} \quad \theta_4 = -\omega_{gl} \quad (24)$$

Für $\psi_1(t)$ gilt also:

$$\psi_1(t) = a_1 e^{i\omega_{geg}t} + a_2 e^{-i\omega_{geg}t} + a_3 e^{i\omega_{gl}t} + a_4 e^{-i\omega_{gl}t} \quad (25)$$

Anschaulicher ist die Umformung zu einer Lösung mit den gebräuchlichen periodischen Sinus und Cosinus Funktionen. Hierbei müssen die Vorfaktoren ebenfalls über die Anfangsbedingungen errechnet werden. So ist $\psi_1(t)$ gegeben durch:

$$\psi_1(t) = A_1 \sin(\omega_{geg}t) + A_2 \cos(\omega_{geg}t) + A_3 \sin(\omega_{gl}t) + A_4 \cos(\omega_{gl}t) \quad (26)$$

Analog kann die Funktion $\psi_2(t)$ ermittelt werden. Auch hier müssen die Faktoren durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Es fällt auf, dass die Schwingungen der Pendel jeweils eine Überlagerung zweier Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen sind.

2.3 Die Schwingungen

Nachdem die formale Lösung der Bewegungsgleichung der gekoppelten Pendel hergeleitet wurde, sollen jetzt die möglichen Schwingungen untersucht werden. Diese werden durch unterschiedliche Anfangsbedingungen hervorgerufen.

2.3.1 Gleichsinnige Schwingung

Als Voraussetzung der gleichsinnigen Schwingung ist die Anfangsauslenkung beider Pendel gleich. Hierbei ändert sich die Länge der Feder nicht und es wirkt kein zusätzliches rücktreibendes Drehmoment auf die Pendel. Diese Pendelbewegung verhält sich wie die Pendelbewegung eines einzelnen Pendels. Beide Pendel schwingen mit der gleichen Frequenz $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{T}} = \omega_{gl}$. Diese Schwingung ist also verantwortlich für den ersten Teil unserer Lösung der Schwingungsgleichung.

2.3.2 Gegensinnige Schwingung

Bei der gegensinnigen Schwingung sind die Anfangsbedingungen der beiden Pendel gerade entgegengesetzt. So ist $\psi_1(0) = -\psi_2(0)$. Durch die symmetrischen Anfangsbedingungen stellt sich eine symmetrische Schwingung ein. So gilt zu jedem Zeitpunkt $\psi_1(t) = -\psi_2(t)$. Nun kann das Drehmoment auf ein Pendel mit $M = -\tilde{D}\psi - 2Dr\psi$ errechnet werden. Die Folge ist, dass beide Pendel mit gleicher Frequenz $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{T} + 2\frac{Dr^2}{T}} = \omega_{geg}$ gegenläufig schwingen. Die so hervorgerufene Schwingung entspricht dem zweiten Teil unserer Lösung der Schwingungsgleichung.

2.4 Die Schwebeschwingung

Sind die Anfangsbedingungen nicht symmetrisch angeordnet, so kommt es zu einer Schwebeschwingung. Dabei wird ein Teil der (Pendel-)Energie periodisch von einem Pendel auf das andere übertragen. Mathematisch kann die Schwebeschwingung als Überlagerung von zwei Schwingungen mit unterschiedlicher Frequenz aufgefasst und beschrieben werden. Die oben hergeleitete Schwingungsgleichung für das gekoppelte Pendel entspricht diesem Zusammenhang. Die Schwebeschwingung entsteht hierbei durch die Überlagerung der gleichsinnigen und der gegensinnigen Schwingung. Abbildung (2) verdeutlicht die Entstehung einer Schwebeschwingung. (Die in der Abbildung gezeigte Schwingung ist ein Spezialfall einer Schwebeschwingung, die dann Eintritt, wenn als Anfangsbedingung nur ein Pendel ausgelenkt wird. Die nun auftretende Schwebung zeichnet sich dadurch aus, dass jeweils die gesamte Pendelenergie übertragen wird, also jeweils ein Pendel vollständig zur Ruhe kommt.)

Eine Schwebeschwingung entsteht also durch die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen unterschiedlicher (Kreis-) Frequenzen. Die Charakterisierung von Schwebeschwingungen erfolgt aber häufig durch die Angabe einer Kreisfrequenz (ω_+), die eigentliche Frequenz der Schwingung und einer Schwebekreisfrequenz (ω_-). In unserem Fall gilt für diese Frequenzen:

$$\omega_+ = \frac{\omega_{gl} + \omega_{geg}}{2} \quad \omega_- = \frac{\omega_{gl} - \omega_{geg}}{2} \quad (27)$$

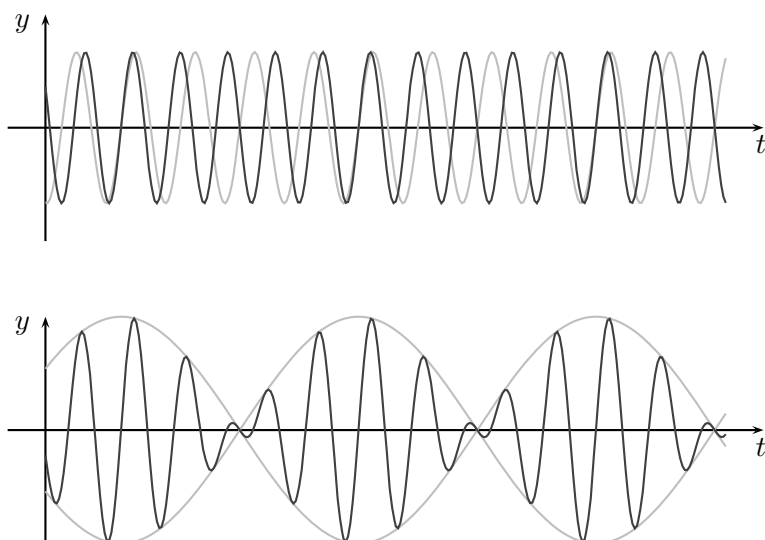


Abbildung 2: Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen (oben) als Schwebeschwingung (unten) mit der eigentlichen Schwingung(dunkel) und der Schwebungskreisfrequenz

Anschaulich ist ω_+ für die Schwingung der Pendel um den Ruhepunkt und die Schwebungsfrequenz (ω_-) für die Änderung der Schwingungsamplitude verantwortlich. Unter der Verwendung der Additionstheoreme lässt sich die Schwingungsgleichung aus (26) umformen zu:

$$\psi_1(t) = (A_1 \cos(\omega_- t) + A_2 \sin(\omega_- t) + C) (A_3 \cos(\omega_+) + A_4 \sin(\omega_+)) \quad (28)$$

Wobei sich die Vorfaktoren wieder aus den Anfangsbedingungen ableiten lassen. Für den Versuch werden die Anfangsbedingungen so gewählt, dass die Konstante $C = 0$ wird. Dies kann durch die Auslenkung nur eines Pendels erreicht werden, während das andere Pendel in Ruhe bleibt. Alternativ dazu kann auch eines der Pendel mit einer Anfangsgeschwindigkeit versehen werden, während das andere in Ruhe belassen wird. Werden zu Beginn beide Pendel unterschiedlich ausgelenkt, so entsteht eine unreine Schwebung. Dabei schwingen beide Pendel mit gleicher Kreisfrequenz, während sich die Amplitude periodisch ändert, aber nie null wird. Abbildung (3) zeigt eine unreine Schwebung.

Die oben genannten Formeln gelten nur, wenn es sich bei den beiden Pendel um Pendel gleichen Ausmaßes handelt, also wenn beide Pendel gleiche Richtgröße und Eigenfrequenz besitzen.

2.5 Der Kopplungsgrad

Beim Vergleichen verschiedener gekoppelter Systeme ist die Angabe von Schwingungsfrequenzen der erzeugenden Schwingungen oder hervorgerufenen Schwingungen eher unpraktisch. Abhilfe schafft hier die Definition einer systemunabhängigen Größe, dem Kopplungsgrad κ . Der Kopplungsgrad ist ein Maß für die Stärke einer Kopplung. Er kann einerseits

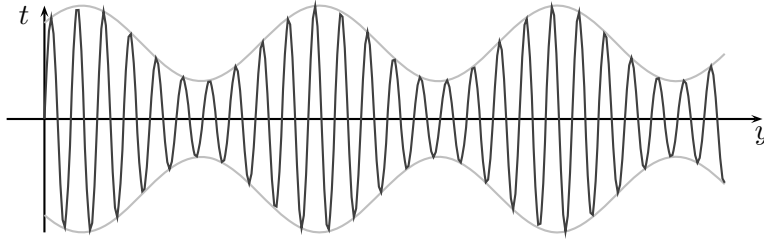


Abbildung 3: Eine unreine Schwebung

durch statische Messungen am System (durch die Auslenkung eines Pendels beim Auslenken des Anderen) oder durch die Messung der Frequenzen der Grundschwingungen ω_{gl} und ω_{geg} . Für den Kopplungsgrad gilt:

$$\begin{aligned} \kappa_{stat} &= \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{Dr^2}{\tilde{D} + dr^2} \\ \kappa_{dyn} &= \frac{\omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2}{\omega_{geg}^2 + \omega_{gl}^2} = \frac{T_{gl}^2 - T_{geg}^2}{T_{gl}^2 + T_{geg}^2} \end{aligned} \quad (29)$$

3 Versuchsdurchführung

Ziel des Versuches ist die quantitative Beschreibung eines gekoppelten Pendelsystems. Dafür werden zwei Pendel mit einer Feder gekoppelt. Abbildung (1) entspricht im wesentlichen der Versuchsanordnung. Zu Beginn des Versuchs werden die Pendel so verändert, dass sie die annähernd gleichen harmonischen Schwingungen ausführen. Untersucht werden drei verschiedene Kopplungsgrade, die durch unterschiedliche Ansatzpunkte der Feder an den Pendeln erreicht werden. Für jede dieser Kopplungen soll nun untersucht werden.

1. Aus der Schwingungsdauer der gleich- und gegensinnigen Schwingungen wird die Kreisfrequenz der Grundschwingungen errechnet. Daraus sollten nun die Periodendauern T_+ und T_- einer Schwebeschwingung errechnet und mit den gemessenen Periodendauern verglichen werden. Aus Gleichung (27) ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Kreisfrequenzen der gleich- und gegensinnigen Schwingungen und denen der Schwebeschwingungen:

$$T_+ = \frac{4\pi}{\omega_{geg} + \omega_{gl}} \quad T_- = \frac{4\pi}{\omega_{geg} - \omega_{gl}} \quad (30)$$

Zusätzlich soll der dynamische Kopplungsgrad mit Hilfe von Gleichung (29) errechnet werden.

2. Es wird der statische Kopplungsgrad bestimmt. Dafür wird eines der beiden Pendel um einen bestimmten Winkel ausgelenkt und die Auslenkung des anderen Pendels bestimmt. Der Kopplungsgrad ergibt sich nun als Quotient der Auslenkungen.
3. Die so erhaltenen Kopplungsgrade sollen verglichen werden.

3.1 Auswertung

Die im Versuch gemessenen Werte werden im folgenden dargestellt und die oben beschriebene Auswertung vorgenommen.

3.1.1 Vorbereitende Messungen

Als Vorbereitung der eigentlichen Messung sind die Pendel zu untersuchen. Die Pendel wurden so verändert, dass sich die Kreisfrequenz ihrer harmonischen Schwingung nur noch im Rahmen einer Messungenauigkeit unterscheiden. Tabelle 1 zeigt die gemessenen Schwingungsdauern und die Kreisfrequenz der Pendel. Die Kreisfrequenzen können im Rahmen der Messungenauigkeit als gleich angenommen werden.

	$T_{[50]}$	$T_{[1]}$	ω
Pendel 1	1 : 59min	2.38s	2.64s ⁻¹
Pendel 2	1 : 57min	2.34s	2.68s ⁻¹

Tabelle 1: Harmonische Schwingung der Pendel

Die zweite vorbereitende Messung dient zur einfachen Bestimmung der Auslenkungswinkel beim Errechnen des statischen Kopplungsgrades. Unterhalb der Pendel ist dazu eine Zentimeterskala aufgebracht, an der die Auslenkung der unteren (aufgesetzten) Spitze abgelesen werden kann. Ist nun die Länge der Pendel bekannt, so kann der Auslenkungswinkel anhand der Auslenkungen errechnet werden. Hierbei gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{\Delta s}{l} \quad (31)$$

Um die Auslenkung aus dem abgelesenen Wert errechnen zu können muss gleichzeitig der Wert der Ruhelage (Z) auf der Skala bestimmt werden. Tabelle 2 stellt die gemessenen Werte dar.

	(l)	(Z)
Pendel 1	88.3cm	33.0cm
Pendel 2	88.3cm	72.5cm

Tabelle 2: Messwerte für die Umrechnung Winkel↔Auslenkung

3.1.2 1. Durchgang

Im ersten Durchgang wurde für den Abstand des Ansatzpunktes der Feder zum Drehgelenk ein Abstand von $r = 20cm$ gewählt.

1. Die Kreisfrequenzen der gleich- und gegensinnigen Schwingungen wurden jeweils zweimal über 50 Perioden bestimmt. Tabelle 3 zeigt die gemessenen Werte für die gleich- und gegensinnigen Schwingungen, sowie die errechneten Kreisfrequenzen mit einer geschätzten Messungenauigkeit von 1s für den einzelnen Messwert.

Daraus ergeben sich nach Gleichung (30) die errechneten Periodendauern einer Schwe-

	$T_{[50]_1}$	$T_{[50]_2}$	\bar{T}	$\bar{\omega}$
gleichsinnig	1 : 58.5min	1 : 58.5min	$2.37s \pm 0.02s$	$2.65s^{-1} \pm 0.02s^{-1}$
gegensinnig	1 : 54.2min	1 : 54min	$2.28s \pm 0.02s$	$2.75s^{-1} \pm 0.02s^{-1}$

Tabelle 3: Kreisfrequenzen der Grundschrwingungen Durchgang 1. Die angegebenen Ungenauigkeiten entsprechen einer Ungenauigkeit von $\pm 1s$ f#r die einzelne Zeitmessung.

	Messung			Rechnung
	T_1	T_2	\bar{T}	T_{rech}
Schwingung	1 : 14min(25)	1 : 15min(25)	$2.98s \pm 0.04s$	$2.32s \pm 0.01s$
Schwebung	1 : 05min(1)	1 : 04min(1)	$64.5s \pm 1.0s$	$125.6s \pm 0.6s$

Tabelle 4: Kreisfrequenzen der Grundschrwingungen Durchgang 1. Die Werte in den Klammern der Zeiten T_1 und T_2 geben die gemessenen Schwingungszahlen an.

beschwingung. Tabelle 4 stellt die unter der Beachtung der Fehlerfortpflanzung errechneten und die gemessene Schwingungsdauer f#r Schwebung und Schwingung dar. Nach Gleichung (29) wird nun der Kopplungsgrad bestimmt. Es ist:

$$\kappa = 0.03 \pm 0.01$$

- Nun soll f#r die aktuelle Kopplung der statische Kopplungsgrad f#r unterschiedliche Auslenkungen errechnet werden. Tabelle 5 stellt die abgelesenen Werte f#r die Auslenkungen der Pendel (s_1 und s_2), die daraus errechneten Auslenkungswinkel φ_1 und φ_2 und den damit berechneten Kopplungsgrad κ_{stat} dar.

Der Mittelwert der gemessenen statischen Kopplung betr#gt $\bar{\kappa} = 0.07$ und der Stan-

	s_1	s_2	φ_1	φ_2	κ
1	23.0cm	71.6cm	-0.113	-0.010	0.089
2	13.0cm	71.1cm	-0.228	-0.015	0.069
3	3.0cm	70.7cm	-0.346	-0.020	0.058
4	33.8cm	82.5cm	0.009	0.113	0.079
5	34.7cm	100.0cm	0.019	0.316	0.060

Tabelle 5: Statischer Kopplungsgrad Durchgang 1. Bei den ersten drei Messungen wurde das linke Pendel ausgelenkt, bei den letzten beiden das rechte

dardfehler $\sigma_{\bar{\kappa}} = 0.01$, so dass gilt:

$$\kappa_{stat} = 0.07 \pm 0.01$$

3.1.3 2. Durchgang

Im zweiten Durchgang wurde f#r den Abstand des Ansatzpunktes der Feder zum Drehgelenk ein Abstand von $r = 30cm$ gew#hlt.

- Die Kreisfrequenzen der gleich- und gegensinnigen Schwingungen wurden jeweils zweimal #ber 50 Perioden bestimmt. Tabelle 6 zeigt die gemessenen Werte f#r die gleich- und

	$T_{[50]_1}$	$T_{[50]_1}$	\bar{T}	$\bar{\omega}$
gleichsinnig	1 : 58.0min	1 : 58.6min	$2.36s \pm 0.02s$	$2.65s^{-1} \pm 0.02s^{-1}$
gegensinnig	1 : 50.0min	1 : 50.0min	$2.20s \pm 0.02s$	$2.85s^{-1} \pm 0.02s^{-1}$

Tabelle 6: Kreisfrequenzen der Grundschwingungen Durchgang 2. Die angegebenen Ungenauigkeiten entsprechen einer Ungenauigkeit von $\pm 1s$ für die einzelne Zeitmessung

gegenseitigen Schwingungen, sowie die errechneten Kreisfrequenzen mit einer geschätzten Messungenauigkeit von $1s$ für den einzelnen Messwert.

Daraus ergeben sich nach Gleichung (30) die errechneten Periodendauern einer Schwebeschwingung. Tabelle 7 stellt die unter der Beachtung der Fehlerfortpflanzung errechneten und die gemessene Schwingungsdauer für Schwebung und Schwingung dar.

	Messung			Rechnung
	T_1	T_2	\bar{T}	T_{rech}
Schwingung	21s(13)	16s(10)	$1.60s \pm 0.06s$	$2.28s \pm 0.01s$
Schwebung	16.0s(1)	16.5s(1)	$16.25s \pm 1.0s$	$62.8s \pm 0.3s$

Tabelle 7: Kreisfrequenzen der Grundschwingungen Durchgang 2. Die Werte in den Klammern der Zeiten T_1 und T_2 geben die gemessenen Schwingungszahlen an.

Nach Gleichung (29) wird nun der Kopplungsgrad bestimmt. Es ist:

$$\kappa = 0.07 \pm 0.01$$

- Nun soll für die aktuelle Kopplung der statische Kopplungsgrad für unterschiedliche Auslenkungen errechnet werden. Tabelle 8 stellt die abgelesenen Werte für die Auslenkungen der Pendel (s_1 und s_2), die daraus errechneten Auslenkungswinkel φ_1 und φ_2 und den damit berechneten Kopplungsgrad κ_{stat} dar.

	s_1	s_2	φ_1	φ_2	κ
1	23cm	71cm	-0.11	-0.02	0.15
2	13cm	70.1cm	-0.22	-0.03	0.12
3	3cm	69.1cm	-0.35	-0.04	0.11
4	34cm	82cm	0.01	0.11	0.11
5	35cm	92cm	0.02	0.22	0.10

Tabelle 8: Statischer Kopplungsgrad Durchgang 2. Bei den ersten drei Messungen wurde das linke Pendel ausgelenkt, bei den letzten beiden das rechte

Der Mittelwert der gemessenen statischen Kopplung beträgt $\bar{\kappa} = 0.12$ und der Standardfehler $\sigma_{\bar{\kappa}} = 0.02$, so dass gilt:

$$\kappa_{stat} = 0.12 \pm 0.02$$

3.1.4 3. Durchgang

Im dritten Durchgang wurde für den Abstand des Ansatzpunktes der Feder zum Drehgelenk ein Abstand von $r = 40\text{cm}$ gewählt.

1. Die Kreisfrequenzen der gleich- und gegensinnigen Schwingungen wurden jeweils zweimal über 50 Perioden bestimmt. Tabelle 9 zeigt die gemessenen Werte für die gleich- und gegensinnigen Schwingungen, sowie die errechneten Kreisfrequenzen mit einer geschätzten Messungsgenauigkeit von 1s für den einzelnen Messwert.

	$T_{[50]_1}$	$T_{[50]_2}$	\bar{T}	$\bar{\omega}$
gleichsinnig	1 : 58.0min	1 : 58.6min	$2.36\text{s} \pm 0.02\text{s}$	$2.66\text{s}^{-1} \pm 0.02\text{s}^{-1}$
gegensinnig	1 : 45.0min	1 : 45.0min	$2.10\text{s} \pm 0.02\text{s}$	$2.99\text{s}^{-1} \pm 0.03\text{s}^{-1}$

Tabelle 9: Kreisfrequenzen der Grundschrwingungen Durchgang 3. Die angegebenen Ungenauigkeiten entsprechen einer Ungenauigkeit von $\pm 1\text{s}$ für die einzelne Zeitmessung

Daraus ergeben sich nach Gleichung (30) die errechneten Periodendauern einer Schwebeschwingungen. Tabelle 10 stellt die unter der Beachtung der Fehlerfortpflanzung errechneten und die gemessene Schwingungsdauer für Schwebung und Schwingung dar.

	Messung			Rechnung
	T_1	T_2	\bar{T}	T_{rech}
Schwingung	10.5s(6)	11s(6)	$1.79\text{s} \pm 0.06\text{s}$	$2.22\text{s} \pm 0.01\text{s}$
Schwebung	10.5s(1)	11s(1)	$10.75\text{s} \pm 1.0\text{s}$	$38.0\text{s} \pm 0.2\text{s}$

Tabelle 10: Kreisfrequenzen der Grundschrwingungen Durchgang 3. Die Werte in den Klammern der Zeiten T_1 und T_2 geben die gemessenen Schwingungszahlen an.

Nach Gleichung (29) wird nun der Kopplungsgrad bestimmt. Es ist:

$$\kappa = 0.12 \pm 0.01$$

2. Nun soll für die aktuelle Kopplung der statische Kopplungsgrad für unterschiedliche Auslenkungen errechnet werden. Tabelle 11 stellt die abgelesenen Werte für die Auslenkungen der Pendel (s_1 und s_2), die daraus errechneten Auslenkungswinkel φ_1 und φ_2 und den damit berechneten Kopplungsgrad κ_{stat} dar.

Der Mittelwert der gemessenen statischen Kopplung beträgt $\bar{\kappa} = 0.20$ und der Standardfehler $\sigma_{\bar{\kappa}} = 0.04$, so dass gilt:

$$\kappa_{stat} = 0.20 \pm 0.04$$

3.2 Fehlerdiskussion

Die oben errechneten Werte zeigen teilweise eine sehr große Abweichung im Vergleich zu den gemessenen Werten. Die gravierendsten Abweichungen treten bei der Schwebungsperiodendauer T_- und dem Kopplungsgrad errechnet über die Elementarschwingungen bzw. die statischen Auslenkungen auf. Gründe für diese Abweichungen sollen hier beschrieben werden.

	s_1	s_2	φ_1	φ_2	κ
1	23cm	69.8cm	-0.11	-0.03	0.27
2	13cm	68.3cm	-0.23	-0.05	0.21
3	3cm	66.6cm	-0.35	-0.07	0.19
4	34.9cm	82.5cm	0.02	0.11	0.19
5	36.3cm	92.5cm	0.04	0.22	0.16

Tabelle 11: Statischer Kopplungsgrad Durchgang 3. Bei den ersten drei Messungen wurde das linke Pendel ausgelenkt, bei den letzten beiden das rechte

3.2.1 Abweichung in T_-

Die Abweichungen in der Schwebungsperiode sind teilweise systematisch bedingte Fehler. Wird die Schwebungsperiode über die Kreisfrequenzen der Grundschrwingungen errechnet, so erhält man einen relativ exakten Wert für die Schwebungsperiodendauer. Die gemessene Schwebungsperiodendauer müsste im Bereich dieser Errechneten liegen.

Das Problem dieser Messung ist die nicht korrekte Messung der Periodendauer einer Schwebung. Die in den Versuchen gemessenen Perioden wurden von Auftreten eines Pendelstillstands bis zum nächsten Stillstand des gleichen Pendel gemessen. Die Periode einer Schwebung ist aber doppelt so groß.

Unter Berücksichtigung dieses systematischen Messfehlers ergeben sich für die Messwerte des ersten Durchganges akzeptable Abweichungen für die Schwebungsperiode. Trotzdem verbleiben für die Messungen im zweiten und dritten Durchgang eine nahezu halb so große Periodendauer im Vergleich zu der errechneten. Allerdings findet man in diesen Durchgängen auch eine Abweichung der Schwingungsperiodendauern T_+ ebenfalls in der Größenordnung eines Faktors einhalb. Bei der Messung der Schwingungsperiode wurde die Periodendauer über mehrere Perioden gemessen, was das gemessene Ergebnis exakter bestimmen lässt. Die Abweichung beider Periodendauern um den gleichen Faktor deutet auf einen Fehler im Versuchsaufbau bzw. in den zu Grunde liegenden Formeln. Mehr dazu im nächsten Abschnitt.

3.2.2 Abweichung in κ

Beim Vergleich der dynamisch und statisch bestimmten Kopplungsgrade fällt auf, dass sich diese ebenfalls ungefähr um den Faktor ein halb bzw. zwei unterscheiden. Der gleiche Faktor fällt bei der Periodendauer der Schwebungen im zweiten und dritten Durchgang auf. Aufgrund der regelmäßigen Abweichung lässt dies auf einen Fehler im Versuchsaufbau oder der zu Grunde liegenden Annahmen schließen.

Der vermutete Grund für die Abweichung der Messwerte liegt in der Annahme einer linearen Kopplung der Pendel. Dies ist im Idealfall durch die Feder gegeben, da diese eine Kraft linear zur Ausdehnung auf die Pendel ausübt. Bei diesem Experiment wurde eine Feder verwendet, deren Länge ungefähr dem Abstand der beiden Pendel entspricht. Durch die Auslenkung eines Pendels in die Richtung des anderen Pendels wird die Feder also nicht gedehnt sondern gestaucht. Die Stauchung der Feder bewirkt ein Ausweichen der Feder aus der Pendelebene, durch das die Kraft der Feder beim Stauchen nicht mehr dem linearen Zusammenhang des Hookschen Gesetzes gehorcht, sondern eine verminderte Kraft auf die Pendel ausübt.

Dieser Effekt wird bei der Messung des statischen Kopplungsgrades nicht berücksichtigt, weil dort ein Pendel vom anderen Pendel weg ausgelenkt wurde. Für die Dehnung der Feder gilt allerdings ein linearer Zusammenhang. Somit wäre die Abweichung der Messwerte des statischen und dynamischen Kopplungsgrades zu erklären.

Bei der Messung der Schwingungsperioden fällt auf, dass diese nur im zweiten bzw dritten Durchgang eine gravierende Abweichung zeigen. Auch diese ist mit der nicht linearen Kraft bei der Stauchung der Feder zu erklären. Im ersten Durchgang der Messung wurde ein Abstand der Feder zur Drehachse von $r = 20\text{cm}$ gewählt und die Pendel zu Messung der Schwingung die Pendel um den Winkel $\varphi = \pm 0.11\text{rad}$ ausgelenkt. Die so entstehende Längenänderung der Feder beträgt maximal ca. 5cm um die Ruhelage bedingt durch die Pendel. Da die Feder so hauptsächlich gedehnt und nur wenig gestaucht wurde sind die Werte der Schwingungen im ersten Durchgang im Bereich einer Messungenauigkeit. Im zweiten und dritten Durchgang wurden aber größere Abstände vom Gelenk der Pendel gewählt, so dass die Feder sowohl eine größere Dehnung als auch Stauchung erfuhr. Dadurch verstärken sich die Effekte der Nichtlinearität der Federkraft erheblich, so dass die Abweichungen der Schwingungsdauern größer werden.

Auch der halblineare Zusammenhang der Federkraft durch die Ausdehnung bzw. Stauchung der Feder führt zu einer Schwebung. Allerdings müssten die verwendeten Formeln zur Beschreibung dieses Problems angepasst und weitere Messungen unter Berücksichtigung dieses Verhaltens der Feder vorgenommen werden um das System genauer beschreiben zu können. Dieses Problem könnte auch durch die Wahl einer kürzeren Feder oder kleinerer Abstände r der Federansatzpunkte an den Pendeln umgangen werden.

Auch wenn die quantitative Beschreibung dieses Systems gekoppelter Pendel nicht exakte Ergebnisse geliefert hat, so ist die qualitative Untersuchung von einer Kopplung zweier Pendel durchaus gelungen und hat einen Einblick in die physikalischen Grundlagen einer Kopplung schwingfähiger Systeme vermittelt.

4 Fragen und Aufgaben

Im folgenden sollen die gestellten Aufgaben beantwortet werden.

4.1 Gekoppelte Schwingung in der Molekülphysik

Jedes Molekül oder jeder feste Körper besteht aus einzelnen Atomen, die durch Kräfte aneinander gebunden werden. Dennoch besitzt jedes Atom die Fähigkeit um seinen Ort zu oszillieren. Jedes einzelne Atom stellt also einen Oszillator dar, der in der Lage ist Schwingungen um seine Position im Molekül auszuführen. Allerdings ist jedes Atom im Festkörper oder Molekül durch starke oder schwache Bindungen an andere Atome gebunden. Diese Bindungen entstehen durch elektrostatische Effekte zwischen den einzelnen Atomen und können im physikalischen Sinne als Kopplung angesehen werden. Gebundene Atome können somit als ein System gekoppelter Oszillatoren angesehen werden.

Kristalle sind hier gesondert zu erwähnen. Durch den regelmäßigen Aufbau ihrer Atomstruktur und die lineare Kopplung durch die Bindung besitzen Kristalle eine relativ exakte Eigenfrequenz. Dies macht man sich in der Technik zu nutze um konstante Frequenzen zu erzeugen. Ein sogenannter Schwingquarz, eine besondere Art von einem Kristall, führt in einem elektrischen Wechselfeld Schwingungen aus, wenn die Frequenz der angelegten Schwingung mit der Eigenfrequenz des Kristalles übereinstimmt. Die Eigenfrequenz des

Kristalles hängt in erster Linie nur von der Kopplung bzw. Bindung der Atome im Kristall ab. Da die Kopplung der Atome bei Kristallen temperaturabhängig ist, können diese auch als Temperatursensoren eingesetzt werden.

Ein anderes Phänomen der Kopplung ist als eine schwache Art der Molekülbindung bekannt. Die van-der-Waals Kräfte zwischen langen unpolaren Molekülen bzw. Molekülteilen entstehen durch gegenseitig induzierte Dipole in den Molekülen. Hierfür ist nicht die Schwingung von Atomen sondern vielmehr die Schwingung von der Elektronenverteilung verantwortlich. Durch die schwache Kopplung der Schwingungen findet letztendlich eine Synchronisation der Elektronenschwingung von zwei oder mehreren Molekülen statt, die für eine schwache Bindung (Dipolkräfte) der Moleküle verantwortlich ist.

4.2 Messung hoher Frequenzen

Die Messung von hohen Frequenzen ist technisch nur schwer und mit teilweise großen Abweichungen möglich. Als Hilfsmittel können hierbei Schwebungen eingesetzt werden. Voraussetzung ist die Möglichkeit, eine Schwingung gleicher Amplitude und ähnlicher Frequenz erzeugen zu können. Überlagert man nun die zu messende Schwingung mit der Referenzschwingung, so entsteht eine Schwebung, deren Schwebungsfrequenz sich weit unter der zu messenden Frequenz befindet und somit einfacher zu bestimmen ist. Mit Hilfe der Schwebungsfrequenz und der Referenzfrequenz kann nun auf die unbekannte Frequenz geschlossen werden.

5 Verzeichnisse

5.1 Abbildungsverzeichnis

1	Schema gekoppelte Pendel	3
2	Überlagerung von Schwingungen	7
3	Eine unreine Schwebung	8

5.2 Tabellenverzeichnis

1	Harmonische Schwingung der Pendel	9
2	Messwerte für die Umrechnung Winkel↔Auslenkung	9
3	Kreisfrequenzen der Grundschrwingungen Durchgang 1	10
4	Kreisfrequenzen der Schwebeschwingungen Durchgang 1	10
5	Statischer Kopplungsgrad Durchgang 1	10
6	Kreisfrequenzen der Grundschrwingungen Durchgang 2	11
7	Kreisfrequenzen der Schwebeschwingungen Durchgang 2	11
8	Statischer Kopplungsgrad Durchgang 2	11
9	Kreisfrequenzen der Grundschrwingungen Durchgang 3	12

10	Kreisfrequenzen der Schwebeschwingungen Durchgang 3	12
11	Statischer Kopplungsgrad Durchgang 3	13

5.3 Literaturverzeichnis

- [1] B. Runge *Gekoppelte Pendel: Versuchsanleitung*
- [2] Verschiedene *Wikipedia - Die freie Enzyklopädie* <http://de.wikipedia.org>
- [3] H. Kuchling *Taschenbuch der Physik* 16. Auflage
- [4] Halliday, Resnick, Walker *Physik*