Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In den Naturwissenschaften ist die Auswertung und Verifizierung von Messwerten nach durchgeführten Versuchen ein wichtiger Bestandteil der Versuchsdokumentation. Ein gutes Werkzeug bietet die mathematische Statistik, die sich mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen einer oder mehrerer Zufallsvariablen beschäftigt.
Francis Galton stellte Ende des 19. Jahrhunderts ein mechanisches Zufallsexperiment vor, mit dem die sog. *Binomialverteilung*, eine spezielle Art von Wahrscheinlichkeitsverteilung, veranschaulicht werden kann. Das nach ihm benannte *Galton-Brett*.
Galtons Experiment bestand aus einem Nagelbrett, durch das Kugeln rollen, die an jedem Nagel zufällig nach links oder rechts abgelenkt werden und schließlich am Ende des Bretts in verschiedenen, gleich breiten Fächern zur Ruhe kommen. Führt man dieses Experiment nicht nur mit einer, sondern mit mehreren Kugeln durch, so beobachtet man für die Anzahl der Kugeln in den verschiedenen Fächern eine bestimmte Verteilung. Diese Verteilung ähnelt bei Experimenten mit vielen Kugeln dem Profil eines Glockenquerschnitts, der *Glockenkurve*, die wegen ihrer Bedeutung für viele Zufallsexperimente auch *Normalverteilung* genannt wird.

2 Versuchsaufbau

Anstelle von dem von Galton verwendeten Nagelbrett tritt bei diesem Experiment eine modernere Versuchsanordung, die aber die gleiche Verteilung liefert, wie das Orginal.

2.1 Das Galton-Brett

Das verwendete Galton-Brett besteht aus einem verschlossenen, in Acrylglas gefrästen Labyrinth in das Metalkugeln aus einem Kugelspeicher einzeln in das Labyrinth einrollen und sich nach dem Labyrinth in 11 Fächer verteilen. Je Versuch können so 256 Kugeln durch das Labyrinth geschickt werden.
Das Labyrinth besteht hierbei nicht aus runden „Nägeln“ sondern aus gleichmäßigen Sechsecken, angeordnet in 10 Entscheidungsebenen.
Abbildung 1 zeigt die Aufsicht eines der Sechsecke aus dem Labyrinth. Die Kugel kommt

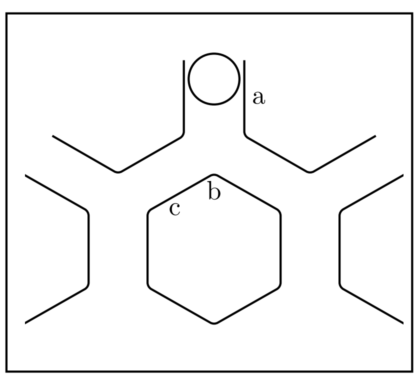

Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines einzelnen Sechsecks. (Idee und Vorlage siehe [1, Seite 5])

hierbei von oben durch den Kanal(a) und trifft auf der oberen Kante(b) des unteren

Sechseck auf. Hier prellt die Kugel so lange zwischen den Seitenwänden der benachbarten Sechsecke hin und her, bis sie sich in eine der beiden Kanäle(c) weiterbewegt. Eine genaue Vorhersage in welchen der beiden Kanäle sich eine Kugel weiterbewegt ist nicht möglich. Im Idealfall sind beide Wege gleichberechtigt, so dass die Wahrscheinlichkeit für einen der beiden Wege bei $\frac{1}{2}$ liegt. Eine solche Versuchsanordung, bei der nur zwei Ausgänge möglich sind, wird als Bernoulli-Versuch bezeichnet.
Beim Durchlaufen des Labyrinths findet aber nicht nur ein sondern 10 Bernoulli-Versuche

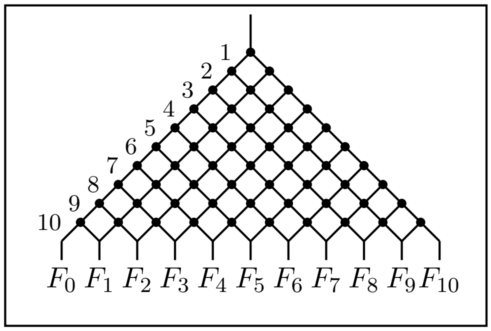

Abbildung 2: Schematischer Aufbau des Labyrinths.

hintereinander statt. Abbildung 2 zeigt eine schematische Darstellung des Labyrinths, wobei jeder der (Knoten-)Punkte ein Bernoulli-Experiment darstellt. Das Labyrinth endet in die 11 Fächer. Zu beachten ist, dass das Labyrinth nur in eine Richtung durchlaufen werden kann (hier von oben nach unten). Befindet sich eine Kugel zum Beispiel in der zweiten Entscheidungsebene, so kann sie sich von dem aktuellen Punkt aus nur noch nach unten, in die dritte Ebene weiterbewegen.
Die Anzahl der möglichen Wege durch das Labyrinth ist in diesem Fall als Produkt der Möglichkeiten einer Stufe im Labyrinth gegeben. Da die einzelne Kugel pro Stufe jeweils zwei Möglichkeiten hat sich zur nächsten Stufe weiterzubewegen, ergibt sich hier eine Anzahl von $2^N = 2^{10} = 1024$ möglicher Wege durch das Labyrinth.
Interessanter ist allerdings die Anzahl der Wege in ein bestimmtes Fach. Betrachtet man das erste(F_0) oder letzte(F_{10}) Fach so ist dies relativ eindeutig. Jeweils nur ein Weg(nur links bzw. rechts) führt in das entsprechende Fach. Für das vierte Fach ist die Anzahl der möglichen Wege nur mit einer Vorüberlegung zu berechnen. Entscheidend für das Fach in das die eine Kugel fällt ist die Anzahl der Ablenkungen nach rechts oder links. Für das vierte Fach muss die Kugel also vier mal nach rechts und sechs mal nach links abgelenkt werden. Entscheidend ist also nicht die Reihenfolge, sondern vielmehr die Anzahl der Ablenkungen nach links oder rechts. Mathematisch lässt sich diese Gegebenheit als Variation ohne Zurücklegen betrachten und durch den Binomialkoeffizienten errechnen. Für das n.te Fach gibt es also $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ mögliche Wege.

2.2 Mechanische Zufälle

Die Motivation für diese Experiment ist die Veranschaulichung von einer Zufallsverteilung. Gegen ein zufälliges Ereignis spricht aber die Mechanik, also die Möglichkeit Bewegungen und Stoßprozesse vorherzusagen. Wie zufällig ist also der Ausgang eines Versuchs am Galton-Brett?

Die Zufälligkeit der Ergebnisse entsteht beim Galton-Brett nur durch mechanische Prozesse. Die einzelne Kugel wird hierbei durch die Schwerkraft nach unten beschleunigt und trifft dann auf die abgerundete Kante eines Sechsecks im Labyrinth (Vgl. Abb1[a]). Hier verliert sie infolge von unelastischen Stößen an den Wänden der benachbarten Sechsecke wieder einen Großteil ihrer kinetischen Energie, bevor sie durch eine der beiden Wege dem gleichen Gegebenheiten der nächsten Stufe zugeführt wird. Durch die großen Energieverluste der Stöße hat die Kugel nicht mehr genug Energie um den Prellstreuer (Abb1[b]) des benachbarten zu überwinden. Hat sie also einen der beiden Wege eingeschlagen kann sie nur noch nach unten entweichen und wird nun der nächsten Entscheidungsebene zugeführt.
Alle Prozesse auf dem Weg der Kugel sind folglich mechanischer Natur. Der Weg einer Kugel durch das Labyrinth wäre also bei genauer Kenntnis der einzelnen Faktoren vorherzusagen und somit nicht zufällig. Allerdings folgt die einzelne Kugel kaum einer Berechnung. Ursachen hierfür sind unter anderem:

- Abweichungen der Kugeln: Selbst wenn die Werte einer Kugel bekannt ist, so unterliegen alle Kugeln im Experiment kleiner Abweichung von Durchmesser, Masse und Oberflächenbeschaffenheit.

- Abweichungen der Anordnung: Auch in der Anordnung variieren die Durchmesser der eingefrästen Kugelbahnen und der Oberflächenbeschaffenheit der Acrylaparatur.

- Abweichung der Startbedingungen: Nicht jede Kugel startet in das Labyrinth mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit bzw. mit der gleichen Anfangsposition.

Auch kleinste Abweichungen wirken sich stark auf das Endergebnis aus, da sich die Abweichungen mit jeder neuen Entscheidung potenzieren. Eine Vorhersage ist also in der Praxis für einen Einzeldurchgang nicht realisierbar.
Da sich aber alle Abweichungen statistisch beschreiben lassen, ist die Gesamtabweichung von vielen Einzelexperimenten ebenfalls statistisch zu erfassen und auszuwerten. Insgesamt wirken sich alle Abweichungen so auf den einzelnen Bernoulli-Versuch aus, dass die Wahrscheinlichkeit einer Ablenkung nach links bzw. rechts mit jeweils der Wahrscheinlichkeit von näherungsweise $\frac{1}{2}$ angegeben werden kann.

2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Galton-Brett

Geht man nun in guter Näherung davon aus, dass eine Kugel an einem Sechseck mit der Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{2}$ nach rechts abgelenkt wird, so ergeben sich für das Galton-Brett die Wahrscheinlichkeiten. Im Folgenden sei p die Wahrscheinlichkeit einer Ablenkung nach rechts[$p = \frac{1}{2}$], F_n das nte Fach(beginnend bei Null), N die Anzahl der hintereinander ausgeführten Bernoulli-Versuche(Stufen im Labyrinth) und somit $N + 1$ die Anzahl der Fächer[$N = 10$], M die Anzahl der Kugeln in einem Durchgang[$M = 256$].

2.3.1 Wahrscheinlichkeit eines Weges

Wie bereits beschrieben gibt es für das Durchlaufen des Labyrinths eine Anzahl von $\omega = 1024$ verschiedenen Wegen. Geht man nun von der Unabhängigkeit der einzelnen Bernoulli-Versuche aus, d.h. der Ausgang der ersten Ablenkung hat keinen Einfluss auf den Ausgang der Folgenden, so kann die Wahrscheinlichkeit eines Weges(s_ω) durch die Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten errechnet werden.

$$s_\omega = (1-p)^{N-n} p^n \tag{1}$$

Wobei n hier für die Anzahl der Ablenkungen nach rechts steht.

2.3.2 Wahrscheinlichkeit eines Durchlaufs

Nun interessiert man sich eher für die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Kugel in ein bestimmtes Fach fällt. Wie in Abschnitt 2.1 bereits angesprochen, lassen sich die Anzahl der Wege in ein Fach über den Binomialkoeffizienten errechnen. Die Wahrscheinlichkeit des eines bestimmten Weges ist durch Gleichung (1) gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine einzelne Kugel in ein bestimmtes Fach F_n fällt ist gegeben durch:

$$p_N(n) = \binom{N}{n} (1-p)^{N-p} p^n \tag{2}$$

Die Gleichung wird als Binomialverteilung über die Fächer F_n bezeichnet. Wobei der Erwartungswert(Mittelwert) μ und die Streuung σ dieser Verteilung durch

$$\mu = \sum_{n=0}^{N} p_N(n) n = 5 \qquad \sigma = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} p_N(n)(n-\mu)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \tag{3}$$

gegeben ist. Wird nur eine Kugel durch das Labyrinth geschickt so erwartet man, dass diese Kugel mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% in einem der drei/fünf(je nach Rundung der Standardabweichung) mittleren Fächer zur Ruhe kommt.

2.3.3 Verteilung im einzelnen Fach

Die Vorüberlegungen gehen alle von Einzelexperimenten aus. Um verlässliche Werte zu erhalten, müssen aber viele Einzelexperimente durchgeführt werden. Betrachtet man nun eine Versuchsreihe aus M Kugeln, kann für jedes Fach eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden, dass genau eine Anzahl m Kugeln nach einem Durchlauf in einem Fach F_n vorzufinden sind. Für das einzelne Fach bildet diese Wahrscheinlichkeitsverteilung wiederum ein Binomialverteilung gegeben durch:

$$s_{N,n,M}(m) = \sum_{n=0}^{N} (1 - p_N(n))^{M-m} p_N(n)^m \tag{4}$$

Somit ist es möglich einen Erwartungswert und eine Streuung für die Anzahl von Kugeln in einem Fach anzugeben.

3 Statistische Grundlagen

Die Motivation zu einem Experiment wie dem Galton-Brett ist in diesem Falle eher mathematischer(statistischer) Natur. Deshalb soll im folgenden kurz auf die mathematischen Grundlagen eingegangen werden.

3.1 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine *Funktion*, die einem Ergebnis eines Zufallsexperiments einen Wert zuordnet. Im Falle des in Abschnitt (2.1) beschriebenen Bernoulli-Versuchs könnte eine Zufallsvariable beispielsweise der Ablenkung nach rechts den Wert 1, entsprechend der Ablenkung nach links den Wert 0 zuordnen. Ein anderes Beispiel ist der Ausgang eines Einzelexperiment des Galton-Bretts. So könnte eine Zufallsvariable dem Durchlauf einer Kugel die Nummer des Faches zuteilen.

3.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist eine Funktion, die einem bestimmten Ereignis einen Wahrscheinlichkeitswert zuordnet. Das Ereignis wird hier durch eine Zufallsvariable repräsentiert. Im Falle unseres Bernoulli-Versuchs würde eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ablenkung nach rechts den Wert $\frac{1}{2}$ zuordnen. Es ist, wenn P die Wahrscheinlichkeitsverteilung und X die Zufallsvariable: $P(X = 1) = \frac{1}{2}$

3.3 Zentraler Grenzwertsatz

Betrachtet man eine Menge von Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung deren Erwartungswert und Varianz endlich ist, so ist für eine endliche Summe von Zufallsvariablen der Erwartungswert $n\mu$ und die Varianz $n\sigma^2$. Bei genügend großer Anzahl von Zufallswerten sind diese Normalverteilt.

Als Konsequenz dieses Satzes kann aus einer Messreihe gleichverteilter Werte auch der Mittelwert einer Messreihe errechnet werden. Für hinreichend große Anzahl an Messwerten kann davon ausgegangen werden, dass dieser Mittelwert normalverteilt ist. Hier gilt:

$$\overline{x} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} x_k \tag{5}$$

Dieser Wert gibt aber nicht unbedingt den Erwartungswert der zu Grunde liegenden Zufallsvariablen an.

3.4 Normalverteilung

Die Normalverteilung ist eine Art einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Hier wird eine große Anzahl von Zufallswerten betrachtet($n \to \infty$), so dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichte durch

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{6}$$

ausdrücken lässt.

Beispielsweise geht der Wert der Formel (2) für große N gegen die Funktion $f(n)$ mit den in Werten aus Formel (3). Der Mittelwert(μ) gibt hierbei die Position des Maximums, die Varianz(σ^2) die Breite der Glockenkurve an.

3.5 Standardabweichung

Die Standardabweichung(σ_x) einer Messreihe gibt die Zuverlässigkeit der Messungen an. Sie kann durch

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{k=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \tag{7}$$

berrechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass die Standardabweichung, wie auch der Mittelwert, nur ein Schätzwert ist und „nur“ den mittleren Fehler einer Messung angibt. Neben der Standardabweichung(σ_x) gibt der Standardfehler($\sigma_{\overline{x}}$) die *Standardabweichung des Mittelwerts* an. Es ist:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \tag{8}$$

Mit Hilfe des Standardfehlers und der Normalverteilungsfunktion kann die Wahrscheinlichkeit, dass der unbekannte wahre Wert (x) der zu ermittelten Größe im Intervall $[\overline{x} - \sigma_{\overline{x}}, \overline{x} + \sigma_{\overline{x}}]$ liegt errechnet werden:

$$W(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{b} e^{\frac{z^2}{2}} dz \tag{9}$$

Für $a = b = 1$ ergibt sich so eine Wahrscheinlichkeit von 0.68, dass der gesuchte Wert $x = \overline{x} \pm \sigma_x$ ist. Ist eine höhere Wahrscheinlichkeit verlangt, so muss das betreffende Intervall vergrößert werden.

4 Aufgaben

Die Lösungen für die in der Versuchsanleitung gestellten Aufgaben.

4.1 Vorbereitung

Bei einem Versuch mit dem Galton-Brett werden $M = 265$ Kugeln auf $N+1$ Fächer verteilt. Versieht man nun jede Kugel mit einem Merkmal, so dass die Reihenfolge entscheidend ist, gibt es $(N+1)^M = 11^{256} \approx 3.9 \cdot 10^{260}$ verschiedene Möglichkeiten die Kugeln auf die 11 Fächer zu verteilen.
Betrachtet man allerdings nur die Anzahl der Kugeln in den Fächern, also ohne Beachtung der Reihenfolge, so ergibt sich eine Anzahl von $\binom{(N+1)+M-1}{M} = \binom{275}{265} \approx 4.1 \cdot 10^{17}$ verschiedenen Möglichkeiten.

4.2 Messungen

Bei der Messung am Galton-Brett werden $K = 10$ Messreihen erhoben, bei denen jeweils die Anzahl von Kugeln $T(k, n)$ im Fach F_n bestimmt und in die Tabelle eingetragen wird. Die Messwerte sind in Tabelle 1 dargestellt.

4.3 Auswertung

Die Auswertung besteht in diesem Falle aus der Berechnung der statistischen Werte der erhobenen Messungen.

k ⋰ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	4	16	24	29	75	58	28	15	6	1
2	0	3	12	25	53	45	68	32	10	5	0
3	1	4	14	32	45	62	45	29	12	4	0
4	2	2	20	28	45	65	60	21	11	1	1
5	1	4	12	26	43	62	53	40	10	3	2
6	0	4	19	30	55	69	43	24	14	3	0
7	0	3	11	34	52	65	53	52	11	4	1
8	1	1	14	35	49	62	44	33	7	8	2
9	0	4	15	28	41	57	58	26	15	2	0
10	3	2	9	28	41	62	62	33	13	3	0

Tabelle 1: Messergebnisse

4.3.1 Aufgabe 1

Gefordert sind die Angaben eines Mittelwerts (Formel (5)) und dessen Standardfehlers (Formel(8)). Als Vergleich zu diesen gemessenen Werten dienen die theoretisch ermittelte Erwartungswerte durch die Binomialverteilung und die Normalverteilung. Die Werte sind in Tabelle 2 dargestellt. Abbildung 3 zeigt das entsprechende Histogramm der Werte.
Die errechneten Erwartungswerte sind auf der Annahme entstanden die Anzahl in einem Fach wäre unabhängig von denen in anderen Fächern. Diese Betrachtung entspricht nicht ganz der Wirklichkeit, da wenn eine bestimmte Anzahl von Kugeln in einem Fach vorzufinden sind, nur noch der Rest der Kugeln auf die anderen Fächer verteilt werden kann. Die Berücksichtigung dieser Tatsache würde aber das Ergebnis kaum verändern und soll deshalb vernachlässigt werden.

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
$\overline{x}$	0.8	3.1	14.2	29.0	45.7	62.3	54.5	29.8	11.9	3.9	0.7
$\sigma_{\overline{x}}$	1.0	1.1	3.4	3.7	7.9	7.6	8.2	5.4	2.5	2.0	0.8
$\overline{x}_B$	0.25	2.50	11.25	30.00	52.50	63.00	52.50	30.00	11.25	2.25	0.25
$\overline{x}_G$	0.43	2.63	10.68	29.02	52.88	64.59	52.88	29.02	10.68	2.63	0.43

Tabelle 2: Die Auswerung der Messergebnisse und als Vergleich, Werte die durch eine Binomialverteilung($\overline{x}_B$) bzw. eine Normalverteilung($\overline{x}_G$) errechnet werden.

4.3.2 Aufgabe 2

In der zweiten Aufgabe soll nun das einzelne Bernoulli-Experiment untersucht werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit(p), dass eine Kugel nach rechts abgelenkt wird. Daraus ergibt sich auch die Wahrscheinlichkeit($1-p$) einer Ablenkung nach links.
Ein Weg durch das Labyrinth des Galton-Bretts ist im Prinzip eine Hintereinanderschaltung von Zufallsexperimenten deren Ausgang durch das Fach charakterisiert ist. Fällt eine Kugel in das vierte Fach, so ist bekannt, dass die Kugel sechmal nach links und viermal nach rechts abgelenkt wurde. Summiert man nun die Anzahl der Kugeln in einem Fach auf und multipliziert diese mit der Anzahl der Ablenkungen nach rechts, so erhält man,

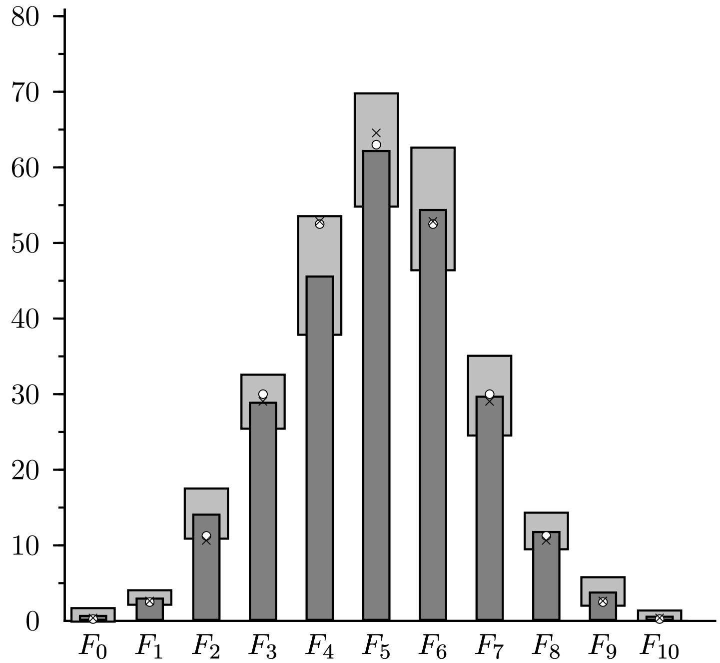

Abbildung 3: Die Verteilung der Kugelanzahlen auf 11 Fächer mit 256 Kugeln. Die grauen Balken stellen die erwartet Kugelanzahl aufgrund unserer Messung dar, der dargestellte Vertrauensbereich entspricht einfacher Genauigkeit (Wahrscheinlichkeit von 68%). Zusätzlich sind die Erwartungswerte für die Binominalverteilung($\circ$) und die der Normalverteilung($\times$) in das Histogramm eingetragen.

bei Berücksichtigung aller Fächer, alle Ablenkungen nach rechts. In Formeln:

$$T_1 = \sum_{n=0}^{N} \left[n \sum_{k=1}^{K} T(k,n) \right] \tag{10}$$

Die Anzahl der gesamten Ablenkungen kann durch NMK beschrieben werden. Also führen jeweils M Kugeln in K Durchgängen N Bernoulli-Experimente aus. Bei 10 gemessenen Durchgängen ergibt dies eine Gesamtzahl von 25600. Aus diesen Werten kann nun die Wahrscheinlichkeit für eine Ablenkung nach rechts bestimmt werden.

a) Der Mittelwert über alle Ablenkungen (wobei eine Ablenkung nach rechts mit 1 gewertet wird) liefert, da es sich bei der Ablenkung um ein Bernoulli-Experiment handelt, die Wahrscheinlichkeit($\overline{p}$) mit der eine Kugel nach rechts abgelenkt wird.

$$\overline{p} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t = \frac{T_1}{T} \tag{11}$$

Mit Hilfe der Formel (10) wurde so Gesamtanzahl der Ablenkungen nach rechts mit $T_1 = 12857$. Daraus ergibt sich eine Gesamtzahl $T_0 = 12743$ an Ablenkung nach links. Mit der Hilfe der Formel (11) kann nun $\overline{p} = 0.5022$ angegeben werden.
Die Berechung des Standardfehlers($\sigma_{\overline{p}}$ dieses Mittelwerts ist mit Voraussetzung $T(T-1) \approx T^2$ und der Formel für Standardabweichung und Standardfehler möglich. Es gilt

für die Varianz(das Quadrat des Standardfehlers):

$$\begin{aligned}
\sigma_{\overline{p}}^2 &= \frac{1}{T(T-1)}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\overline{p})^2 \\
&\approx \frac{T_0(0-\overline{p})^2+T_1(1-\overline{p})^2}{(T_0+T_1)^2} \\
&= \frac{T_0\,T_1}{(T_0+T_1)^3}
\end{aligned} \tag{12}$$

Ausgehend von dieser Formel kann der Standardfehler von $\overline{p}$ als

$$\sigma_{\overline{p}} = \sqrt{\frac{T_0\,T_1}{(T_0+T_1)^3}} = \sqrt{\frac{12743\cdot 12857}{25600^3}} \approx 0.003 \tag{13}$$

berechnet werden.
Damit ist der gesuchte Wert $p = 0.502 \pm 0.03$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 68%(einfache Genauigkeit) und $p = 0.502 \pm 0.06$ bei einer Wahrscheinlichkeit von 96%(doppelte Genauigkeit).
Die Wahrscheinlichkeit, dass der gesuchte Wert größer als 0.505, also $p > \overline{p} + \sigma_{\overline{p}}$ ist, liegt bei $\frac{100-68}{2}\% = 16\%$.

b) Um den Wert von p bei doppelter Genauigkeit auf $p = \overline{p} \pm 0.001$ bestimmen zu können, müssen logischerweise mehr Versuche durchgeführt werden. Da sich für viele Versuche die Anzahl der Ablenkungen nach rechts bzw. links annähern ($T_0 \approx T_1 \approx \frac{T}{2}$), kann die Standardabweichung durch

$$\sigma_{\overline{p}} \approx \frac{1}{2\sqrt{T}} \tag{14}$$

ausgedrückt werden. Da doppelte Genauigkeit gefordert ist muss $2\sigma_{\overline{p}} < 0.001$ und bei der Ausnützung von Formel (14) $T > \left(\frac{1}{0.001}\right)^2 = 10^6$. Es müssen also mehr als 10^6 Bernoulli-Experimente durchgeführt werden. Da bei einem Durchgang 256 Kugeln jeweils 10 mal abgelenkt werden, müssten um 10^6 Ablenkungen zu erreichen 390625 Durchgänge mit dem Galton-Brett durchgeführt werden. Bei einer realistischen Zeit von $3min$ pro Durchgang wäre man so knapp zwei Jahre und drei Monate beschäftigt.

c) Mit der so bestimmten Abweichung für Wahrscheinlichkeit einer Ablenkung nach rechts kann nun die Fehlerfortpflanzung untersucht werden. Hierzu wird die Wahrscheinlichkeit ($\overline{p}$) in die Gleichungen für Mittelwert und Standardabweichung der Binomialverteilung der Kugeln in den Fächern errechnet. Der Erwartungswert bei der Wahrscheinlichkeit liegt in diesem Fall Fall bei $\mu_{\overline{p}} = 5.02$. Da dieser Erwartungswert allerdings auf der Grundlage von eventuell fehlerhaften Daten erhoben wurde ist hier die Fehlerfortpflanzung zu beachten.
Betrachtet man den Weg durch die Rechnungen so können die Fehler bestimmt werden. Für die Berechnung des Mittelwerts wird die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel in ein bestimmtes Fach fällt, benutzt. Der Fehler dieser Funktion entsteht durch multiplikative Fehlerüberlagerung. Unter der Annahme die Fehler seien unabhängig gilt:

$$\frac{\delta p_N(n)}{p_N(n)} = \sqrt{(N-n)\left(\frac{\delta(1-\overline{p})}{1-\overline{p}}\right)^2 + n\left(\frac{\delta(\overline{p})}{\overline{p}}\right)^2} \tag{15}$$

Der Mittelwert selbst entsteht durch eine gewichtete Addition der einzelnen Wahrscheinlichkeiten ($p_N(n)$), so dass für den Fehler des Mittelwertes gilt:

$$\delta\mu = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} (\delta p_N(n) \cdot n)^2} \tag{16}$$

Der Fehler bei einer Ablenkung ist bekannt; δp und $\delta(1-p)$ sind jeweils 0.003. Damit ergibt sich der Fehler des Mittelwerts als:

$$\delta\mu = 0.14 \qquad \Rightarrow \mu = 5.0 \pm 0.1 \tag{17}$$

Der Fehler der Standardabweichung kommt durch die additive Überlagerung des Fehlers des Ausdrucks $p_N(n)(n-\mu)^2$ Zustande. Sei $x := p_N(n)(n-\mu)^2$, so ist der Fehler der Standardabweichung gegeben durch:

$$\delta\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N} (\delta x)^2} \tag{18}$$

Es muss nun der Fehler δx bestimmt werden. Es gilt:

$$\delta x = p_N(n)(n-\mu)^2 \sqrt{\left(\frac{\delta p_N(n)}{p_N(n)}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta\mu}{\mu}\right)} \tag{19}$$

Alle Werte sind somit bekannt, so dass der Fehler der Standardabweichung und diese selbst berechnet werden kann.

$$\begin{aligned} \delta\sigma = 0.164 \qquad & \sigma = Np(1-p) = 2.49 \\ \Rightarrow \quad & \sigma = 2.5 \pm 0.1 \end{aligned} \tag{20}$$

Diese Werte zeigen deutlich, dass auch kleinere Abweichungen sich fortpflanzen und auch rechnerisch eindeutige Werte zum Teil stark beeinflussen können.

5 Verzeichnisse

5.1 Abbildungsverzeichnis

5.2 Tabellenverzeichnis

5.3 Literaturverzeichnis

[1] B. Pompe *Galtonsches Brett: Versuchsanleitung in Studentenfassung*

[2] B. Runge *Script zur Fehlerrechnung*

[3] Verschiedene *Wikipedia - Die freie Enzyklopädie* http://de.wikipedia.org